



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

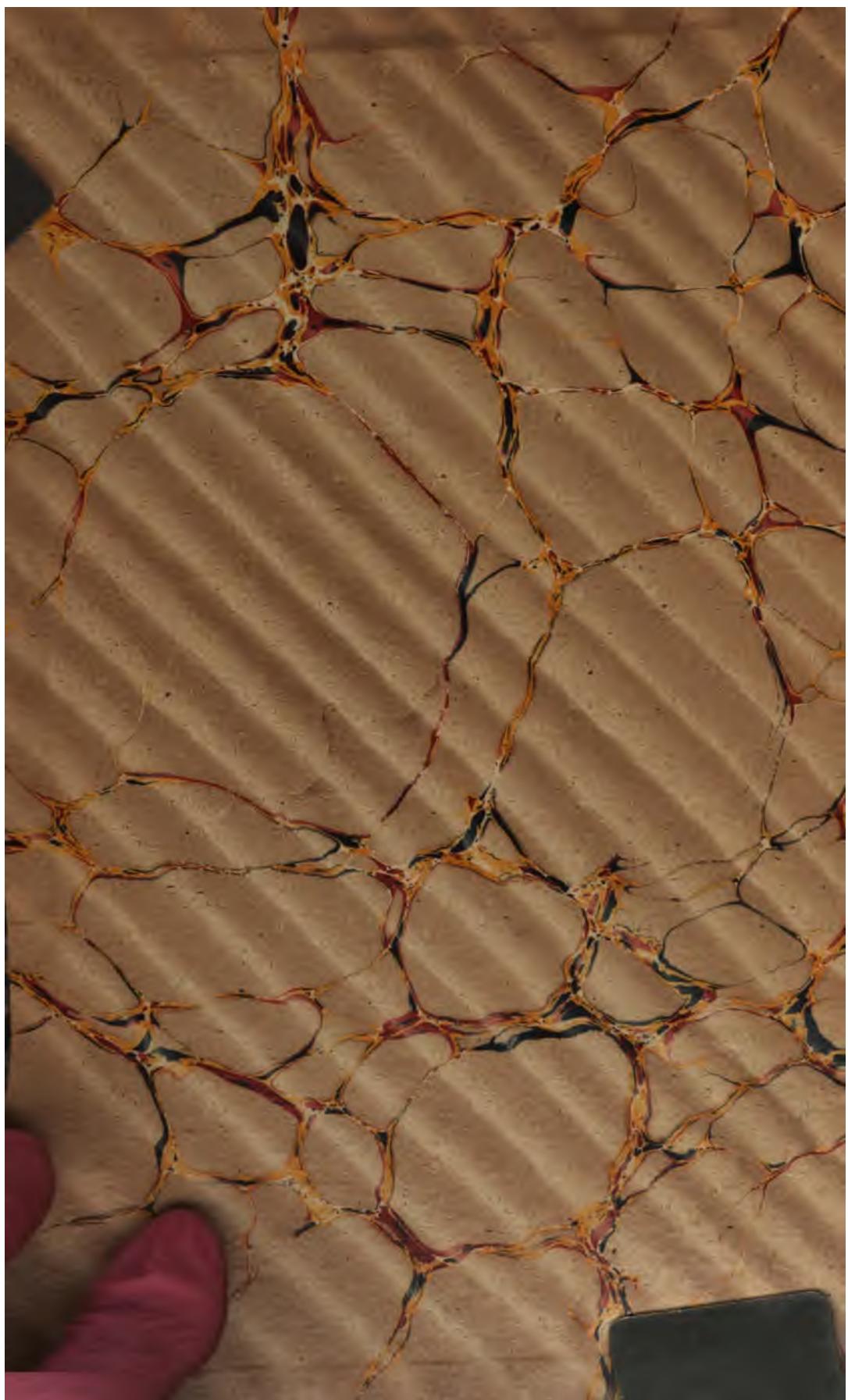
### About Google Book Search

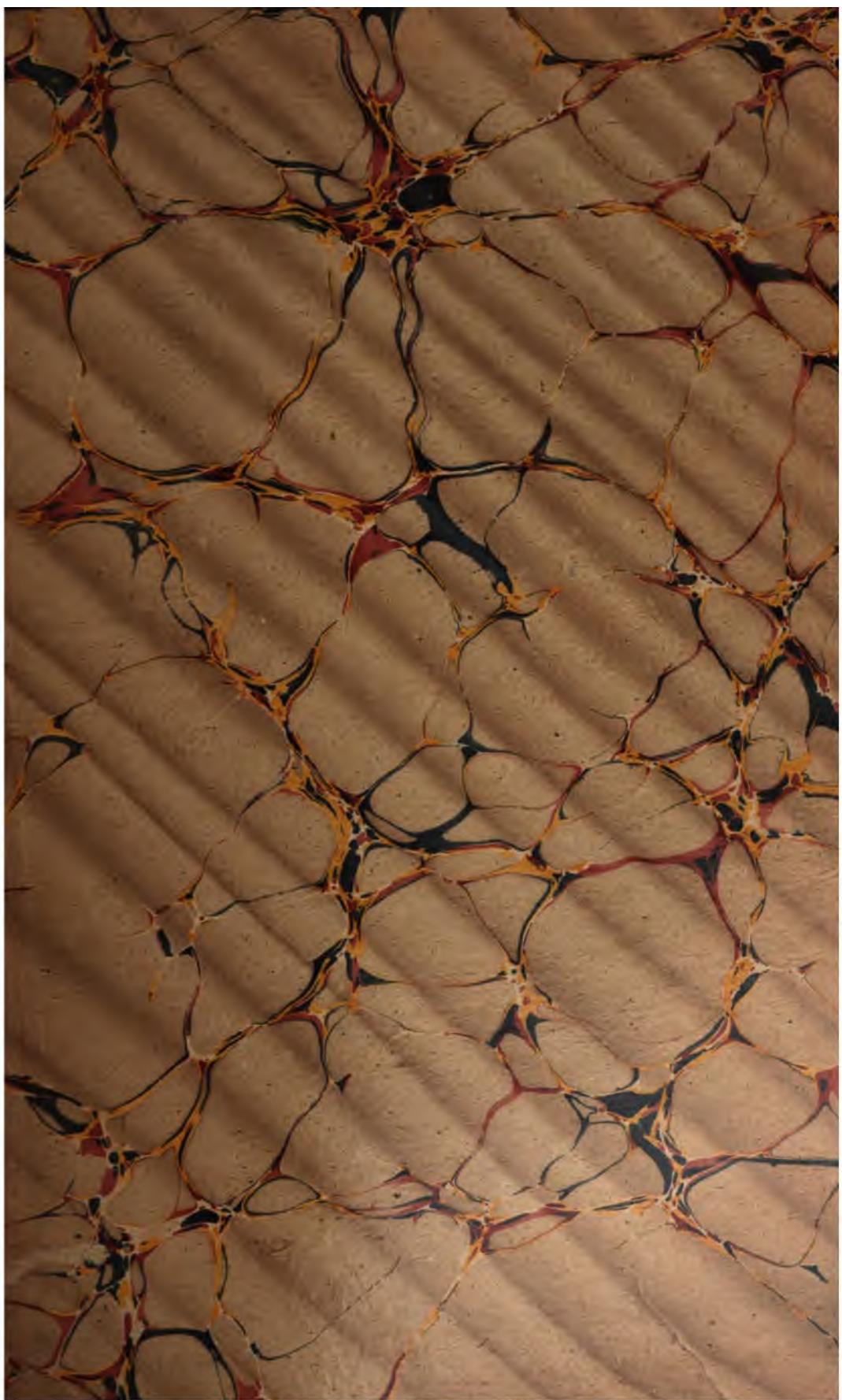
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

Stanford University Libraries



3 6105 027 648 307





5784









**RENDICONTI**  
**DEL**  
**CIRCOLO MATEMATICO**  
**DI PALERMO**

---

## ANNUNZIO.

Per ogni Nota o Memoria, presentata in una sola adunanza del Circolo, la quale sorpassi le 16 pagine di stampa, rimane a carico dell'Autore la spesa di composizione delle pagine eccedenti, in ragione di L. 3, 15 per ogni pagina o parte di essa.

Gli Autori che desiderano *Estratti* delle Note e Memorie inserite nei Rendiconti, sono vivamente pregati di avvertirne la Redazione nell'atto di rinviare le prove di stampa. A fine di agevolare i soci nella pubblicazione dei loro lavori, gli estratti saranno ad essi mandati a mano a mano che procede la stampa del fascicolo.

Il prezzo degli estratti è regolato come segue:

Per un foglio di 8 pagine, o meno:

50 esemplari = L. 5; 100 = L. 7, 75; 150 = L. 11; 200 = L. 13, 75; 250 = L. 17; 300 = L. 20, 25; 350 = L. 23, 50; 400 = L. 26, 75.

Per ogni foglio successivo di pagine 8, o parte di esso (oltre la spesa di composizione, come sopra, per le pagine eccedenti i due fogli di stampa):

50 esemplari = L. 3, 75; 100 = L. 5, 25; 150 = L. 7, 25; 200 = L. 8, 75; 250 = L. 10, 75; 300 = L. 12, 75; 350 = L. 14, 75; 400 = L. 16, 75.

Le tavole sono a carico degli Autori.

REDAZIONE: 28, via Ruggiero Settimo — Palermo.

---

**Tipografia Matematica, 28, via Ruggiero Settimo, Palermo.**

Proto-Compositore: GANTANO SENATORE.

Macchina tipo Marinoni perfezionata dalla casa AUGUSTO DELL'ORTO di Milano.

RENDICONTI  
DEL  
CIRCOLO MATEMATICO  
DI PALERMO

---

TOMO IX. — ANNO 1895.

---

PARTE PRIMA: MEMORIE E COMUNICAZIONI.

---

LIBRARY  
LELAND STANFORD JUNIOR  
UNIVERSITY

PALERMO,  
*SEDE DELLA SOCIETÀ*  
28, via Ruggiero Settimo, 28

---

1895

**117421**

VIA REGOLI  
ROMA 11. CIRCONVALLAZIONE  
VIA SISTEMATICA

## MEMORIE E COMUNICAZIONI.

---

### RICERCHE

SUI SISTEMI LINEARI DI CURVE ALGEBRICHE PIANE,  
DOTATI DI SINGOLARITÀ ORDINARIE.

Memoria II<sup>a</sup> di G. B. GUCCIA, in Palermo (\*).

---

Adunanza dell'11 e 25 marzo 1894.

---

### § VII.

#### *Teoria delle curve $\Phi$ relative ad un fascio di curve.*

38. Nei §§ VII-XI di queste Ricerche, fondandomi sulle più elementari nozioni di Geometria sulla retta, mi propongo di trattare con metodo sintetico alcune delle principali questioni della teoria generale delle curve algebriche piane, mercè l'uso di certi luoghi geometrici relativi ad un fascio di curve, i quali indicherò col nome di «curve  $\Phi$ ». Tutti i problemi pei quali sono state fin qui adoperate le polari relative ad una curva  $C$ , potranno essere risolti più speditamente mediante le curve  $\Phi$  relative al fascio individuato dalla curva data  $C$  insieme ad una curva ausiliare, dello stesso ordine, presa ad arbitrio nel piano.

In un altro lavoro metodi analoghi saranno adoperati per lo studio di questioni riguardanti le superficie algebriche.

39. Siano nel piano : ( $C$ ) un fascio di curve d'ordine  $n$ ;  $P$  un

---

(\*) Vedi la Memoria I<sup>a</sup>, in questi Rendiconti, t. VII, 1893, pp. 193-255.

*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 1<sup>a</sup>.—Stampato il 24 settembre 1894. †

presso qualsiasi. Si indichi con  $\Phi_p$  il luogo dei punti di contatto delle tangenti medie di  $P$  alle curve del fascio  $(C)$ . Se  $R$  è una retta contenuta ad arbitrio nel piano e si consideri la curva,  $\Omega_R$ , involucro delle rette tangenti alle curve di  $(C)$  nei punti di  $R$ , egli è evidente che le tangenti contenute da  $P$  all'involucro  $\Omega_R$  incontreranno  $R$  nei punti in cui questa retta è incontrata dal luogo  $\Phi_p$ . Vi è quanto dire che l'ordine della curva  $\Phi_p$  è uguale alla classe della curva  $\Omega_R$ .

Le curve del fascio  $(C)$  incontrano la retta  $R$  in gruppi di  $n$  punti, i quali costituiscono un'involuzione di grado  $n$  e prima specie. Poichè questa involuzione possiede  $2(n-1)$  punti doppi, ne segue che per l'involucro  $\Omega_R$  la retta  $R$  è una tangente multipla del grado  $2(n-1)$ . D'altra parte, assumendo sulla retta  $R$  un punto arbitrario  $Q$ , per questo punto passa una, ed una sola, retta che è ivi tangente ad una curva del fascio  $(C)$  (quella individuata da  $Q$ ), ossia una, ed una sola, retta dell'involucro  $\Omega_R$  diversa da  $R$ . Di qui s'inferisce che le tangenti all'involucro  $\Omega_R$  che si possono condurre dal punto  $Q$  sono equivalenti a  $2(n-1)+1=2n-1$ . Dunque, la classe di  $\Omega_R$ , eppero l'ordine di  $\Phi_p$ , è  $2n-1$ . Se ora si conduce pel punto  $P$  una trasversale arbitraria, questa retta incontrerà il luogo  $\Phi_p$  nei  $2(n-1)$  punti doppi dell'involuzione di grado  $n$  e prima specie costituita dai gruppi di  $n$  punti nei quali la retta medesima è incontrata dalle curve di  $(C)$ . Donde si conclude, che la curva  $\Phi_p$  passa con  $(2n-1)-2(n-1)=1$  ramo pel punto  $P$ . Laonde :

*Il luogo  $\Phi_p$ , corrispondente ad un punto  $P$  del piano, è dell'ordine  $2n-1$  e passa, in generale, con un ramo pel punto  $P$  (\*).*

40. Suppongasi che il fascio  $(C)$  possegga un punto base ( $r$ )-plo,  
B. Due casi sono da prendere in esame :

a) Il fascio contiene una curva,  $C$ , che ha in  $B$  un punto  $(r+\beta)$ -plo ( $\beta > 0$ ). In tal caso le  $r$  tangenti in  $B$  alla curva generica del fascio,  $C^*$ , sono tutte fisse (n° 9, Teor. II).

b) Il fascio non contiene curva che ha in  $B$  un punto di mol-

(\*) Cfr. Cremona, *Introdaz.*, n° 85.

tiplicità  $> r$ . In tal caso una (almeno) delle  $r$  tangenti in  $B$  alla curva generica  $C^*$  è *mobile* (n° 14, Teor. V). Con altre parole: i gruppi di  $r$  tangenti in  $B$  alle singole curve del fascio costituiscono un'involuzione di raggi,  $J_r$ , di grado  $r$  e prima specie, con o senza raggi base.

In ciascuna di queste due ipotesi cerchiamo anzitutto come si comporta in  $B$  la curva  $\Phi_B$ , luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da  $B$  alle curve del fascio ( $C$ ).

**C A S O a).**—Una trasversale  $R$  condotta ad arbitrio pel punto  $B$  è incontrata dalle curve di ( $C$ ) in gruppi di punti di un'involuzione di grado  $n$  e prima specie, la quale possiede un punto base ( $r$ )-plo  $B$  e contiene un gruppo (individuato dalla curva  $C'$ ) che ha in  $B$  un punto ( $r + \rho$ )-plo. Questa involuzione si scinde nel punto  $B$  contato  $r$  volte ed in un'involuzione di grado  $n - r$  e prima specie la quale contiene un gruppo che ha in  $B$  un punto ( $\rho$ )-plo. Poichè i (\*)

$$2(n - r - 1) - (\rho - 1) = 2n - 2r - \rho - 1$$

punti doppi (diversi da  $B$ ) di quest'ultima involuzione sono i punti in cui la retta  $R$ , uscente da  $B$ , è incontrata ulteriormente dal luogo  $\Phi_B$ , se ne conclude che questa curva ha in  $B$  un punto multiplo del grado

$$(2n - 1) - (2n - 2r - \rho - 1) = 2r + \rho.$$

**a)** Sia  $T$  una delle  $r$  tangenti fisse in  $B$  alla curva generica  $C^*$ . Questa retta sarà incontrata dalle curve di ( $C$ ) in gruppi di punti di un'involuzione di grado  $n$  e prima specie, la quale possiede in  $B$  un punto base ( $r + 1$ )-plo e contiene un gruppo (individuato dalla curva  $C'$ ) che ha in  $B$  un punto ( $r + \rho$ )-plo. Questa involuzione si scinde nel punto  $B$  contato  $r + 1$  volte ed in un'involuzione di grado  $n - r - 1$  e prima specie la quale contiene un gruppo che ha in  $B$  un punto ( $\rho - 1$ )-plo. Poichè i

$$2(n - r - 2) - (\rho - 2) = 2n - 2r - \rho - 2$$

(\*) Due proposizioni, etc. Lemma II (ponendo ivi  $t = 1$ ).

punti doppi (diversi da  $B$ ) di quest'ultima involuzione sono i punti in cui la retta  $T$ , uscente da  $B$ , è ulteriormente incontrata dal luogo  $\Phi_B$ , ne segue che la retta  $T$  ha

$$(2n - 1) - (2n - 2r - \rho - 2) = 2r + \rho + 1$$

delle sue intersezioni con la curva  $\Phi_B$  riunite in  $B$ . Dnde si conclude che la retta  $T$  è tangente in  $B$  alla curva  $\Phi_B$ .

β) Sia  $T$  una delle  $r+\rho$  tangenti in  $B$  alla curva  $C$ . Questa retta sarà incontrata dalle curve di  $(C)$  in gruppi di punti di un'involuzione di grado  $n$  e prima specie, la quale possiede in  $B$  un punto base  $(r)$ -plo e contiene un gruppo (individuato dalla curva  $C'$ ) che ha in  $B$  un punto  $(r+\rho+1)$ -plo. Questa involuzione si scinde nel punto  $B$  contato  $r$  volte ed in un'involuzione di grado  $n-r$  e prima specie, la quale contiene un gruppo che ha in  $B$  un punto  $(\rho+1)$ -plo. I

$$2(n - r - 1) - \rho = 2n - 2r - \rho - 2$$

punti doppi (diversi da  $B$ ) di quest'ultima involuzione essendo i punti in cui la retta  $T$ , uscente da  $B$ , è ulteriormente incontrata dal luogo  $\Phi_B$ , se ne conclude che

$$(2n - 1) - (2n - 2r - \rho - 2) = 2r + \rho + 1$$

intersezioni di  $T$  con  $\Phi_B$  sono riunite in  $B$ , e conseguentemente che la retta  $T$  è tangente in  $B$  alla curva  $\Phi_B$ .

Riassumendo :

**TEOREMA XXXVII.** — *Se un fascio  $(C)$  possiede un punto base  $(r)$ -plo,  $B$ , e contiene una curva,  $C'$ , dotata in  $B$  d'un punto  $(r+\rho)$ -plo ( $\rho > 0$ ), il luogo  $\Phi_B$  (n° 39) corrispondente al punto  $B$  passa, in generale, con  $2r + \rho$  rami pel punto  $B$  ed ha ivi per tangentи le  $r$  tangentи fisse del fascio e le  $r + \rho$  tangentи della curva  $C'$  (\*).*

(\*) Posto  $r = n - 1$ , onde  $\rho = 1$ : Per un fascio d'ordine  $n$  con un punto base  $(n - 1)$ -plo,  $B$ , a tangentи fisse, il relativo luogo  $\Phi_B$  si scinde nelle  $n - 1$  tangentи fisse in  $B$  e nelle  $n$  rette che costituiscono la curva del fascio dotata d'un punto  $(n)$ -plo in  $B$  [Teor. IV, nota, Esempio c)].

**C A S O b).**—Una trasversale  $R$  condotta ad arbitrio pel punto  $B$  è incontrata dalle curve di  $(C)$  in gruppi di punti di un'involuzione di grado  $n$  e prima specie dotata in  $B$  d'un punto base  $(r)$ -plo, ossia di un'involuzione la quale si scinde nel punto  $B$  contato  $r$  volte ed in un'involuzione di grado  $n-r$  e prima specie. Poichè i  $2(n-r-1)$  punti doppi di quest'ultima involuzione sono i punti in cui la retta  $R$ , uscente da  $B$ , incontra ulteriormente il luogo  $\Phi_B$ , se ne conclude subito che questa curva ha in  $B$  un punto multiplo del grado

$$(2n-1) - 2(n-r-1) = 2r + 1.$$

Sia  $t$  una qualunque delle  $2r+1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_B$ . Questa retta incontrerà ulteriormente il luogo  $\Phi_B$  in

$$(2n-1) - (2r+2) = 2(n-r)-3$$

punti, ciascuno dei quali è doppio per l'involuzione di grado  $n-r$  e prima specie costituita dai gruppi di  $n-r$  punti in cui la retta  $t$  è incontrata ulteriormente dalle curve del fascio  $(C)$ . Pertanto

$$2(n-r-1) - [2(n-r)-3] = 1$$

dei  $2(n-r-1)$  punti doppi che competono a questa involuzione è il punto  $B$ . Val quanto dire che fra le curve del fascio  $(C)$  ve n'è una che ha  $r+2$  intersezioni con la retta  $t$  riunite nel punto  $B$ .

Reciprocamente, se una retta uscente da  $B$  ha  $r+2$  intersezioni riunite in  $B$  con una curva del fascio  $(C)$ , la retta medesima sarà una delle  $2r+1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_B$ .

Suppongasi che l'involuzione di raggi  $J_r^1$ , di grado  $r$  e prima specie, costituita dai gruppi di tangentи in  $B$  alle singole curve del fascio  $(C)$ , possegga un raggio base semplice  $\tau$ . Fra le curve di  $(C)$  ve ne sarà una, ed una sola, la quale ha, con la retta  $\tau$ ,  $r+2$  intersezioni riunite in  $B$ . Questa retta dunque sarà una delle  $2r+1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_B$ .

Ma in questo caso la retta  $\tau$  è, in  $B$ , pel relativo ramo della curva  $\Phi_B$ , una tangente stazionaria. Infatti, la retta medesima è incontrata dalle curve del fascio  $(C)$  in gruppi di punti di un'involuzione di grado  $n$  e prima specie dotata in  $B$  d'un punto base  $(r+1)$ -plo, ossia di un'involuzione la quale si scinde nel punto  $B$  contato  $r+1$

volte ed in un'involuzione di grado  $n - r - 1$  e prima specie. Poichè i  $2(n - r - 2)$  punti doppi di quest'ultima involuzione sono i punti in cui la retta  $\tau$ , uscente da  $B$ , incontra ulteriormente il luogo  $\Phi_B$ , ne segue che

$$(2n - 1) - 2(n - r - 2) = 2r + 3$$

intersezioni della retta  $\tau$  con il luogo  $\Phi_B$  saranno riunite in  $B$ . Val quanto dire che la retta  $\tau$  ha tre intersezioni confuse in  $B$  col ramo della curva  $\Phi_B$  del quale essa è la relativa tangente.

Così, se in una retta  $\tau$  vengono a coincidere  $\sigma(<r)$  raggi base semplici dell'involuzione  $J_r^t$ , la retta medesima conterà per  $\sigma$  delle  $2r + 1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_B$ , ed avrà con la curva  $\Phi_B$   $2r + 3$  intersezioni riunite nel punto  $B$ .

Riassumendo :

**TEOREMA XXXVIII.** — *Se un fascio ( $C$ ) possiede un punto base ( $r$ -plo,  $B$ , i cui gruppi di tangenti alle singole curve costituiscono un'involuzione,  $J_r^t$ , di grado  $r$  e prima specie, il luogo  $\Phi_B$  (n° 39), corrispondente al punto  $B$ , passa per questo punto, in generale, con  $2r + 1$  rami a tangenti distinte, ciascuna delle quali è una retta che ha  $r + 2$  intersezioni riunite in  $B$  con una curva del fascio ( $C$ ). In particolare, se l'involuzione  $J_r^t$  possiede un raggio base di grado  $\sigma(<r)$ , questo conterà per  $\sigma$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_B$  ed avrà con la curva  $\Phi_B$   $2r + 3$  intersezioni riunite nel punto  $B$  (\*)*.

41. Dal Teor. XXXVII per  $r = 0$ : Se un fascio contiene una curva,  $C'$ , dotata d'un punto ( $\rho$ -plo,  $B$  (che non sia punto base del fascio), il relativo luogo  $\Phi_B$  passa con  $\rho$  rami pel punto  $B$  ed ha ivi le stesse tangenti della curva  $C'$ . In particolare: se  $s$  tangenti in  $B$  alla curva  $C'$  coincidono in una, in questa coincideranno  $s$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_B$ .

---

(\*) Posto  $r = n - 1$ : Per un fascio d'ordine  $n$  con un punto base  $(n - 1)$ -plo,  $B$ , i cui gruppi di tangenti alle singole curve costituiscono un'involuzione di grado  $n - 1$  e prima specie, il relativo luogo  $\Phi_B$  si scinde nelle rette che congiungono il punto  $B$  a' residuali  $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$  punti base semplici del fascio. In particolare,  $\sigma(<n - 1)$  di questi ultimi punti base possono essere infinitamente vicini al punto  $B$  in direzioni distinte o coincidenti.

a) Conseguentemente, per  $\rho = 1$ : Dato un fascio di curve, il luogo  $\Phi_P$  corrispondente ad un punto qualunque,  $P$ , del piano passa semplicemente pel punto  $P$  (n° 39) ed è *ivi tangente alla curva del fascio individuata dal punto P*.

42. Cerchiamo ora, in ciascuna delle ipotesi a) e b) del n° 40, come si comporta in  $B$  la curva  $\Phi_P$  corrispondente ad un punto,  $P$ , preso ad arbitrio nel piano.

CASO a).—Sia  $R$  una retta condotta ad arbitrio pel punto  $B$  e si consideri anzitutto la curva,  $\Omega_R$ , inviluppo delle rette tangenti alle curve del fascio ( $C$ ) nei punti di  $R$ . Questa retta è incontrata dalle curve di ( $C$ ) in gruppi di punti di un'involuzione di grado  $n$  e prima specie, la quale si scinde nel punto  $B$  contato  $r$  volte ed in un'involuzione di grado  $n-r$  e prima specie che contiene un gruppo (individuato dalla curva  $C'$ ), per il quale  $B$  è un punto ( $\rho$ )-plo. Quest'ultima involuzione contiene

$$2(n - r - 1) - (\rho - 1) = 2n - 2r - \rho - 1$$

punti doppi (diversi da  $B$ ), in ognuno dei quali la retta  $R$  è tangente ad una curva del fascio ( $C$ ). Di qui s'inferisce che per l'inviluppo  $\Omega_R$  la retta  $R$  è una tangente multipla del grado  $2n - 2r - \rho - 1$ . Se ora si assume sulla retta  $R$  un punto arbitrario  $Q$ , per questo punto passa una, ed una sola, retta che è ivi tangente ad una curva del fascio ( $C$ ) (quella individuata da  $Q$ ), ossia una, ed una sola, retta dell'inviluppo  $\Omega_R$  diversa da  $R$ . Sono dunque equivalenti a  $(2n - 2r - \rho - 1) + 1 = 2n - 2r - \rho$  le tangenti che si possono condurre da  $Q$  all'inviluppo  $\Omega_R$ ; epperò questa curva è della classe  $2n - 2r - \rho$ .

Ritorniamo ora al luogo  $\Phi_P$ . I punti in cui questa curva incontra la retta  $R$  oltre il punto  $B$  sono nel tempo istesso i punti in cui le  $2n - 2r - \rho$  tangenti condotte da  $P$  all'inviluppo  $\Omega_R$  incontrano la retta  $R$ . Di qui s'inferisce che delle  $2n - 1$  intersezioni di  $R$  con  $\Phi_P$  ve ne sono

$$(2n - 1) - (2n - 2r - \rho) = 2r + \rho - 1$$

riunite in  $B$ . Dunque: il luogo  $\Phi_P$  ha in  $B$  un punto multiplo del grado  $2r + \rho - 1$ .

Indichiamo con :

$\Delta$ , il gruppo delle  $r$  tangenti (fisse) in  $B$  alla curva generica del fascio;

$\Delta'_{r+p}$  il gruppo delle  $r + p$  tangenti in  $B$  alla curva  $C$ ;  
 $t$  la retta  $PB$ .

Possiamo intendere che il fascio sia individuato dalla curva  $C$  insieme ad un'altra qualunque delle sue curve,  $C'$  (le cui  $r$  tangenti in  $B$  costituiscono il gruppo fisso  $\Delta$ ) e scriveremo  $(C) \equiv (C, C')$ .

Si conduca pel punto  $P$  una trasversale arbitraria  $T$  e siano rispettivamente :

$$(A_1, A_2, \dots, A_n), \quad (A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$$

i due gruppi di  $n$  punti in cui la retta  $T$  è incontrata dalle curve  $C, C'$ . Questi due gruppi individuano un'involuzione di grado  $n$  e prima specie, i cui  $2(n - 1)$  punti doppi, che indicherò con

$$(D_1, D_2, \dots, D_{2(n-1)}),$$

sono i punti nei quali la trasversale  $T$  è incontrata dal luogo  $\Phi_p$ . Congiungendo i punti  $A, A', D$  col punto  $B$  si otterranno tre gruppi di raggi

$$(21) \quad (A_1 B, A_2 B, \dots, A_n B), \quad (A'_1 B, A'_2 B, \dots, A'_n B)$$

$$(22) \quad (D_1 B, D_2 B, \dots, D_{2(n-1)} B),$$

l'ultimo dei quali è costituito dai raggi doppi dell'involuzione di grado  $n$  e prima specie individuata dai primi due. Così, per ogni posizione della trasversale  $T$  (condotta per  $P$ ), si avranno due gruppi di  $n$  raggi (21), i quali determinano un'involuzione di prima specie i cui  $2(n - 1)$  raggi doppi (22) incontrano la retta  $T$  in punti del luogo  $\Phi_p$ .

Se ora si suppone che la retta  $T$ , ruotando attorno al punto  $P$ , venga a coincidere col raggio  $t$ , al limite :

1° il gruppo  $(A_1 B, A_2 B, \dots, A_n B)$  sarà costituito dal gruppo  $\Delta$ , e dal raggio  $t$  contato  $n - r$  volte;

2° il gruppo  $(A'_1 B, A'_2 B, \dots, A'_n B)$  sarà costituito dal gruppo  $\Delta'_{r+p}$  e dal raggio  $t$  contato  $n - r - p$  volte;

3° il gruppo  $(D_1 B, D_2 B, \dots, D_{2(n-1)} B)$  sarà costituito dalle  $2r + p - 1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_p$  e dal raggio  $t$  contato

$$2(n-1) - (2r + p - 1) = 2n - 2r - p - 1$$

volte. Dunque: le  $2r + p - 1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_p$  sono: i raggi doppi (diversi da  $t$ ) dell'involuzione di grado  $n$  e prima specie individuata dai due gruppi di  $n$  raggi:

$$\Delta_r \cdot t^{n-r}, \quad \Delta'_{r+p} \cdot t^{n-r-p};$$

ossia: i raggi doppi (diversi da  $t$ ) dell'involuzione di grado  $r + p$  e prima specie individuata dai due gruppi:

$$(23) \quad \Delta_r \cdot t^p, \quad \Delta'_{r+p}.$$

a) Suppongasi che  $s (> 1)$  raggi del gruppo  $\Delta_r$  (ovvero del gruppo  $\Delta'_{r+p}$ ) coincidano in uno,  $\tau$ . In questo caso nella retta  $\tau$  coincideranno  $s - 1$  raggi doppi dell'involuzione individuata dai due gruppi (23).

b) Suppongasi che  $s$  raggi del gruppo  $\Delta_r$  ed  $s'$  raggi del gruppo  $\Delta'_{r+p}$  coincidano tutti in uno,  $\tau$  ( $s \neq s'$ ). Scrivendo:

$$\Delta_r \equiv \Delta_{r-s} \cdot \tau^s, \quad \Delta'_{r+p} \equiv \Delta'_{r+p-s'} \cdot \tau^{s'},$$

le tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_p$  diverse da  $\tau$  saranno (23) i raggi doppi (diversi da  $t$  e da  $\tau$ ) dell'involuzione di grado  $r + p - s$  e prima specie individuata dai due gruppi:

$$\Delta_{r-s} \cdot \tau^s \cdot t^p, \quad \Delta'_{r+p-s'} \cdot \tau^{s'} \cdot t^p,$$

ossia, supposto ad es.  $s < s'$ , i raggi doppi (diversi da  $t$  e da  $\tau$ ) dell'involuzione di grado  $r + p - s$  e prima specie individuata dai due gruppi:

$$\Delta_{r-s} \cdot t^p, \quad \Delta'_{r+p-s'} \cdot \tau^{s'-s}.$$

Ora quest'ultima involuzione possiede :

$$2(r + \rho - s - 1) - (\rho - 1) - (s' - s - 1) = 2r + \rho - s - s'$$

raggi doppi diversi da  $t$  e da  $\tau$ . Dunque, nel caso attuale, delle  $2r + \rho - 1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_p$  ve ne saranno

$$(2r + \rho - 1) - (2r + \rho - s - s') = s + s' - 1$$

le quali si confondono col raggio  $\tau$ .

γ) Nell'ipotesi precedente sia  $s = s'$ . In questo caso le tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_p$  diverse da  $\tau$  saranno i raggi doppi (diversi da  $t$  e da  $\tau$ ) dell'involuzione di grado  $r + \rho$  e prima specie individuata dai due gruppi :

$$\Delta_{r+s} \cdot \tau^t, \quad \Delta'_{r+\rho-s} \tau^t,$$

ossia i raggi doppi (diversi da  $t$ ) dell'involuzione di grado  $r + \rho - s$  e prima specie individuata dai due gruppi :

$$\Delta_{r+s} t^t, \quad \Delta'_{r+\rho-s} t^t.$$

E come quest'ultima possiede :

$$2(r + \rho - s - 1) - (\rho - 1) = 2r + \rho - 2s - 1$$

raggi doppi diversi da  $t$ , se ne conclude che delle  $2r + \rho - 1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_p$  ve ne saranno in questo caso

$$(2r + \rho - 1) - (2r + \rho - 2s - 1) = 2s,$$

le quali coincidono nel raggio  $\tau$ .

Riassumendo :

TEOREMA XXXIX. — Sia dato un fascio di curve, il quale possiede un punto base  $(r)$ -plo,  $B$ , e contiene una curva,  $C$ , dotata in  $B$  d'un punto  $(r + \rho)$ -plo ( $\rho > 0$ ). Siano :

$\Delta$ , il gruppo delle  $r$  tangenti fisse in  $B$  alla curva generica del fascio;

$\Delta'_{r+p}$  il gruppo delle  $r + p$  tangenti in  $B$  alla curva  $C'$ .

Il luogo  $\Phi_P$  (n° 39), corrispondente ad un punto  $P$  fissato ad arbitrio nel piano, passa, in generale, con  $2r + p - 1$  rami pel punto  $B$ , ed ha ivi per tangenti i  $2r + p - 1$  raggi doppi (diversi da  $t \equiv PB$ ) dell'involuzione di grado  $r + p$  e prima specie individuata dai due gruppi di  $r + p$  raggi:

$$\Delta_r, t^p, \quad \Delta'_{r+p}.$$

In particolare:

a) Se  $s (> 1)$  raggi del gruppo  $\Delta$ , (ovvero del gruppo  $\Delta'_{r+p}$ ) coincidono in uno, in questo coincideranno  $s - 1$  delle  $2r + p - 1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_P$ .

b) Se  $s$  raggi del gruppo  $\Delta$ , ed  $s'$  raggi del gruppo  $\Delta'_{r+p}$  ( $s \neq s'$ ) coincidono in uno, in questo coincideranno  $s + s' - 1$  delle  $2r + p - 1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_P$ .

c) Se  $s$  raggi del gruppo  $\Delta$ , ed  $s$  raggi del gruppo  $\Delta'_{r+p}$  coincidono in uno, in questo coincideranno  $2s$  delle  $2r + p - 1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_P$ .

CASO b).—Per conoscere, nell'ipotesi (b) del n° 40, come si comporta in  $B$  la curva  $\Phi_P$  corrispondente ad un punto qualunque  $P$  del piano, consideriamo, come sopra, l'inviluppo  $\Omega_R$  relativo ad una retta  $R$  condotta ad arbitrio pel punto  $P$ .

La retta  $R$  è incontrata dalle curve di  $(C)$  in gruppi di punti di un'involuzione di grado  $n$  e prima specie, dotata in  $B$  d'un punto base ( $r$ -plo), la quale possiede  $2(n - r - 1)$  punti doppi diversi da  $B$ . In ognuno di questi ultimi punti la retta  $R$  è tangente ad una curva del fascio. Ma nell'ipotesi attuale vi è inoltre una (ed una sola) curva del fascio che è tangente alla retta  $R$  nel punto  $B$ . Pertanto la retta  $R$  sarà, per l'inviluppo  $\Omega_R$ , una tangente multipla del grado

$$2(n - r - 1) + 1 = 2n - 2r - 1.$$

Osservando poi, come dianzi, che per un punto  $Q$ , scelto ad arbitrio sulla retta  $R$ , passa una, ed una sola, retta tangente in  $Q$  ad

una curva del fascio ( $C$ ) (quella individuata da  $Q$ ), se ne conclude che il numero delle tangenti che si possono condurre da  $Q$  all'inviluppo  $\Omega_R$  è equivalente a

$$(2n - 2r - 1) + 1 = 2(n - r);$$

eppero che la curva  $\Omega_R$  è della classe  $2(n - r)$ .

Ciò posto, i punti in cui la retta  $R$ , uscente da  $B$ , incontra ulteriormente il luogo  $\Phi_P$  sono i punti in cui le  $2(n - r)$  tangenti condotte da  $P$  all'inviluppo  $\Omega_R$  incontrano la retta  $R$ . Talchè, delle  $2n - 1$  intersezioni di  $R$  con  $\Phi_P$  ve ne sono

$$(2n - 1) - 2(n - r) = 2r - 1$$

confuse nel punto  $B$ . Dunque : *il luogo  $\Phi_P$  ha in B un punto multiplo del grado  $2r - 1$ .*

Considerando due gruppi di  $r$  tangenti in  $B$  a due curve scelte ad arbitrio nel fascio ( $C$ ), come quelli che individuano l'involuzione di raggi  $J'_r$ , con procedimento affatto analogo a quello adoperato più sopra (a) si trova che i  $2(r - 1)$  raggi doppi di  $J'_r$  sono tangentи in  $B$  alla curva  $\Phi_P$ . Così, in particolare, se l'involuzione  $J'_r$  possiede un raggio base ( $s$ )-plo,  $\tau$ , che è nel tempo istesso raggio ( $s + \sigma$ )-plo ( $\sigma \leq 1$ ) per uno dei suoi gruppi, delle anzidette  $2(r - 1)$  tangentи in  $B$  alla curva  $\Phi_P$  ve ne saranno  $2s + \sigma - 1$  le quali coincidono nella retta  $\tau$ .

La rimanente tangente in  $B$  alla curva  $\Phi_P$  è la retta  $PB$ . Infatti, poichè la curva  $\Phi_P$  passa semplicemente pel punto  $P$  (n° 39, n° 41, a) ed incontra la retta  $PB$ , oltre  $P$  e  $B$ , nei  $2(n - r - 1)$  punti doppi (diversi da  $B$ ) dell'involuzione di grado  $n$  e prima specie, dotata d'un punto base ( $r$ )-plo in  $B$ , che è costituita dai gruppi di punti in cui  $PB$  è incontrata dalle curve di ( $C$ ), ne segue che

$$(2n - 1) - 1 - 2(n - r - 1) = 2r$$

intersezioni della retta  $PB$  con il luogo  $\Phi_P$  sono confuse in  $B$ ; val quanto dire che  $PB$  è una delle  $2r - 1$  tangenti in  $B$  alla curva  $\Phi_P$ .

Riassumendo :

**TEOREMA XL.** — *Sia dato un fascio di curve, il quale possiede un punto base ( $r$ )-plo,  $B$ , con una (almeno) tangente mobile. Il luogo  $\Phi_p$  (n° 39) corrispondente ad un punto  $P$ , fissato ad arbitrio nel piano, passa, in generale, con  $2r-1$  rami pel punto  $B$ , ed ha ivi per tangentи la retta  $PB$  ed i  $2(r-1)$  raggi doppi dell'involuzione di grado  $r$  e prima specie,  $J_r^1$ , costituita dai gruppi di  $r$  tangentи in  $B$  alle singole curve del fascio.*

a) *In particolare: Se l'involuzione  $J_r^1$  possiede un raggio base ( $s$ )-plo, che sia raggio ( $s+\sigma$ )-plo ( $\sigma \geqq 1$ ) per uno dei suoi gruppi, in questo coincideranno  $2s+\sigma-1$  tangentи in  $B$  alla curva  $\Phi_p$ .*

43. Dal Teorema XXXIX per  $r=0$ : Se un fascio contiene una curva,  $C'$ , dotata d'un punto ( $\rho$ )-plo  $B$  (che non sia punto base del fascio), il luogo  $\Phi_p$ , corrispondente ad un punto qualunque  $P$  del piano, passa con  $\rho-1$  rami pel punto  $B$  ed ha ivi per tangentи i  $\rho-1$  raggi doppi (diversi da  $t \equiv PB$ ) dell'involuzione di grado  $\rho$  e prima specie individuata dai due gruppi di  $\rho$  raggi

$$t^\rho, \quad \Delta'_\rho,$$

dove  $\Delta'_\rho$  indica il gruppo delle  $\rho$  tangentи in  $B$  alla curva  $C'$ . In particolare: se  $s (> 1)$  raggi del gruppo  $\Delta'_\rho$  coincidono in uno, in questo coincideranno  $s-1$  tangentи in  $B$  alla curva  $\Phi_p$ .

44. Dal Teorema XL per  $r=1$ : Se  $B$  è un punto base semplice di un fascio, a tangente mobile, la curva  $\Phi_p$ , corrispondente ad un punto qualunque  $P$  del piano, passa semplicemente per  $B$  ed ha ivi per tangente la retta  $PB$ .

45. Con gli stessi metodi fin qui adoperati si possono ottenere immediatamente varie altre proposizioni intorno al modo di comportarsi di un luogo  $\Phi_p$  in un punto multiplo ordinario della curva generica o di una speciale curva del fascio, in diversi casi di coincidenza delle relative tangentи. Così, ad es., si hanno i seguenti enunciati :

a) Se un fascio contiene una curva,  $C'$ , dotata d'un punto ( $\rho$ )-plo

$B$  con  $s(<\rho)$  tangenti coincidenti in una medesima retta  $\tau$ , il luogo  $\Phi_p$  corrispondente ad un punto  $P$  della retta  $\tau$  (diverso da  $B$ ) avrà in  $B$  un punto  $(\rho - 1)$ -plo con  $s$  tangentи coincidenti nella retta  $\tau$ . Le rimanenti  $\rho - s - 1$  tangentи in  $B$  alla curva  $\Phi_p$  saranno i raggi doppi (diversi da  $\tau$ ) dell'involuzione individuata dai gruppi  $\tau^{\rho-1}$ ,  $\Delta'_{\rho-s}$  (dove  $\Delta'_{\rho-s}$  indica il gruppo delle  $\rho - s$  residuali tangentи in  $B$  alla curva  $C'$ ).

β) Se un fascio contiene una curva dotata d'un punto  $(\rho)$ -plo  $B$  con tutte le tangentи coincidenti in una medesima retta  $\tau$ , il luogo  $\Phi_p$  corrispondente ad un punto  $P$  della retta  $\tau$  (diverso da  $B$ ) avrà in  $B$ , in generale, un punto  $(\rho)$ -plo a tangentи distinte. Quando il punto  $P$  percorre la retta  $\tau$  i gruppi di  $\rho$  tangentи in  $B$  alla corrispondente curva  $\Phi_p$  generano un'involuzione di grado  $\rho$  e prima specie senza raggi base, la quale contiene un gruppo (quello relativo alla curva  $\Phi_B$ ) che è costituito dal raggio  $\tau$  contato  $\rho$  volte (Teor. XXXVII per  $r = 0$ ).

46. Si può ancora dedurre dal Teor. XXXIX la seguente proposizione :

Se in un fascio d'ordine  $n$  vi è un luogo, composto di una curva  $K$  d'ordine  $v$ , contata  $\mu$  volte, e di una residuale curva semplice  $L$  d'ordine  $n - v\mu$ , il luogo  $\Phi_p$ , corrispondente ad un punto  $P$  fissato ad arbitrio nel piano, si scinde nella curva  $K$  contata  $\mu - 1$  volte ed in una curva residua  $\Phi'_p$  d'ordine  $(2n - 1) - v(\mu - 1)$ , la quale, in generale, passa con un ramo: per ciascuno degli  $n$  punti base del fascio che trovansi sulla curva  $K$ ; per ciascuno degli  $n(n - v\mu)$  punti base del fascio che trovansi sulla curva  $L$ ; per ciascuno dei  $v(n - v\mu)$  punti comuni alle curve  $K$  ed  $L$ .

Per  $\mu > 1$ , se  $B$  è uno degli  $n$  punti base appartenenti a  $K$  e si indica con  $\alpha$  la tangente fissa in  $B$  alla curva generica del fascio e con  $\beta$  la tangente in  $B$  alla curva  $K$ , allora la tangente in  $B$  alla curva  $\Phi'_p$  sarà il raggio doppio (diverso da  $t \equiv PB$  e da  $\beta$ ) dell'involuzione di prima specie e grado  $\mu$  individuata dai due gruppi:  $\alpha, t^{v\mu-1}$ ,  $\beta^\mu$  (Teor. XXXIX, α) (\*).

Se  $B$  è uno degli  $n(n - v\mu)$  punti base del fascio che tro-

(\*) Per  $\mu = 1$ , la curva  $\Phi'_p$  avrà per tangente in  $B$  la retta  $PB$  (n° 44).

vansi sulla curva  $L$ , la curva  $\Phi'_p$  ha per tangente in  $B$  la retta  $PB$  (n° 44).

Se  $B$  è uno dei  $v(n - v\mu)$  punti comuni alle curve  $K$  ed  $L$  e si indicano risp. con  $\beta$  e  $\gamma$  le relative tangenti in  $B$ , allora la tangente in  $B$  alla curva  $\Phi'_p$  sarà il raggio doppio (diverso da  $t \equiv PB$  e da  $\beta$ ) dell'involuzione di prima specie e grado  $\mu + 1$  individuata dai due gruppi:  $t^{\mu+1}$ ,  $\beta^\mu \cdot \gamma$  (n° 43).

a) In particolare, se un punto,  $B$ , della curva  $(\mu)$ -pla  $K$  è, nel tempo istesso, punto base  $(\mu)$ -plo, a tangentи mobili, del fascio, in tal caso il luogo residuo  $\Phi'_p$  passerà pel punto  $B$  con  $\mu$  rami ed avrà ivi per tangentи la retta  $PB$  ed i  $\mu - 1$  raggi doppi (diversi dalla tangente in  $B$  alla curva  $K$ ) dell'involuzione,  $J_\mu^t$ , di grado  $\mu$  e prima specie, costituita dai gruppi di  $\mu$  tangentи in  $B$  alle singole curve del fascio. Se, inoltre, l'involuzione  $J_\mu^t$  possiede un raggio base  $(s)$ -plo, che sia raggio  $(s + \sigma)$ -plo ( $\sigma \leq 1$ ) per uno dei suoi gruppi, in questo coincideranno  $2s + \sigma - 1$  delle anzidette  $\mu - 1$  tangentи in  $B$  alla curva  $\Phi'_p$  (Teor. XL). Etc. etc.

### § VIII.

#### *Sui punti doppi delle curve d'un fascio.*

47. Sia  $(C)$  un fascio generale d'ordine  $n$ . Si assumano arbitrariamente nel piano due punti  $P, Q$ . I corrispondenti luoghi  $\Phi_p, \Phi_Q$  passeranno entrambi, con un ramo, per ciascuno degli  $n^2$  punti base semplici di  $(C)$  (n° 44) e per ciascuno dei  $2(n - 1)$  punti in cui la retta  $PQ$  è tangente a curve di  $(C)$ . Ora, uno qualunque,  $D$ , dei residuali

$$(2n - 1)^2 - n^2 - 2(n - 1) = 3(n - 1)^2$$

punti d'intersezione delle curve  $\Phi_p, \Phi_Q$  è tale che ciascuna delle rette  $DP, DQ$  ha due intersezioni riunite in  $D$  con una curva di  $(C)$ . Da qui s'inferisce che  $D$  è punto doppio per quella curva che esso individua nel fascio  $(C)$ . Donde il noto teorema:

« Le curve di un fascio d'ordine  $n$  hanno, in generale,  $3(n - 1)^2$  punti doppi ».

48. Nell'ipotesi che il fascio  $(C)$  possieda, in un punto  $B$  del piano, una singolarità base *qualunque* (\*), proponiamoci di esprimere l'abbassamento  $U$  prodotto dal punto  $B$  nel numero  $3(n-1)^2$  dei punti doppi del fascio.

Siano:  $V$  il numero delle intersezioni confuse nel punto  $B$  di due curve qualunque del fascio;  $W$  il numero delle intersezioni confuse nel punto  $B$  di due luoghi  $\Phi_P, \Phi_Q$  corrispondenti a due punti  $P, Q$  fissati ad arbitrio nel piano;  $\delta$  il numero dei punti doppi del fascio  $(C)$  diversi da  $B$ . Poichè le curve  $\Phi_P, \Phi_Q$  passano inoltre, con un ramo, per ciascuno dei residuali  $n^2 - V$  punti base semplici di  $(C)$  e per ciascuno dei  $2(n-1)$  punti in cui la retta  $PQ$  è toccata da curve di  $(C)$ , ne segue che esse s'incontreranno ulteriormente in  $(2n-1)^2 - W - (n^2 - V) - 2(n-1) = 3(n-1)^2 - W + V$  punti, ciascuno dei quali (n° 47) sarà doppio per una curva del fascio  $(C)$ . Si ha quindi

$$\delta = 3(n-1)^2 - W + V;$$

eppero

$$U = 3(n-1)^2 - \delta = W - V.$$

Laonde:

**TEOREMA XLI.** — *Se due curve dello stesso ordine  $C, C'$  passano in modo QUALUNQUE per un medesimo punto  $B$  del piano, l'abbassamento prodotto dal punto  $B$  nel numero dei punti doppi del fascio  $(C, C')$  è uguale al numero delle intersezioni confuse in  $B$  dei luoghi  $\Phi_P, \Phi_Q$  (n° 39) corrispondenti a due punti  $P, Q$  fissati ad arbitrio nel piano, diminuito del numero delle intersezioni riunite in  $B$  delle curve  $C, C'$ .*

a) Per  $V=0$ , ossia nell'ipotesi che una delle due curve non passi pel punto  $B$ :

*Se una curva possiede, in un punto  $B$ , una singolarità QUALUNQUE, l'abbassamento prodotto dal punto  $B$  nel numero dei punti doppi del*

(\*) Per la ricerca contenuta in questo numero usciamo eccezionalmente dal campo delle singolarità ordinarie, al quale abbiamo inteso di limitarci nel presente lavoro.

*fascio individuato dalla curva medesima insieme ad un'altra curva dello stesso ordine, non passante per B, è uguale al numero delle intersezioni confuse in B dei luoghi  $\Phi_P$ ,  $\Phi_Q$  (n° 39) corrispondenti a due punti P, Q fissati ad arbitrio nel piano.*

49. In virtù dei teoremi sulle curve  $\Phi$  dimostrati più sopra, la relazione

$$(24) \quad U + V - W = 0$$

ci permette di determinare il numero U in vari casi di singolarità basi ordinarie di un fascio.

a) Suppongasi che le curve C, C' (Teor. XLI) passino rispettivamente pel punto B con r, r + p ( $p > 0$ ) rami a tangenti distinte e diverse per le due curve. In tal caso si ha subito

$$V = r(r + p)$$

ed in virtù del Teor. XXXIX:

$$W = (2r + p - 1)^2 (*).$$

Onde

$$U = W - V = (2r + p - 1)^2 - r(r + p).$$

Epperò (n° 40, a):

TEOREMA XLII. — *Se un fascio possiede un punto base (r)-plo, B ( $r \geq 0$ ), a tangenti fisse e distinte, e contiene una curva dotata in B d'un punto  $(r + p)$ -plo ( $p > 0$ ), a tangenti distinte e diverse dalle prime, il numero dei punti doppi del fascio risulta diminuito, in generale, di*

$$(2r + p - 1)^2 - r(r + p)$$

*unità (\*\*).*

(\*) Lo stesso teorema XXXIX ci affida che, per una scelta arbitraria dei punti P e Q, i luoghi  $\Phi_P$  e  $\Phi_Q$  non hanno tangenti comuni in B.

(\*\*) Per casi particolari:  $r > 0$ ,  $p = 1$ ;  $r = 0$ ,  $p > 0$ ;  $r = 1$ ,  $p > 0$  vedi: Cremona, *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane* (Annali di Matematica, t. VI, 1864, pp. 153-168), n° 10, 11, 12.

b) Nelle ipotesi precedenti suppongasi che  $s (> 1)$  tangenti in  $B$  alla curva  $C$  [ovvero  $s (> 1)$  tangenti in  $B$  alla curva  $C'$ ] coincidano in una medesima retta. In tal caso sarà

$$V = r(r + \rho)$$

ed in virtù del Teor. XXXIX,  $\alpha$ :

$$W = (2r + \rho - 1)^2 + (s - 1);$$

eppero :

$$U = W - V = (2r + \rho - 1)^2 - r(r + \rho) + (s - 1).$$

Laonde :

**TEOREMA XLIII.** — *Nelle ipotesi del Teor. XLII, se  $s (> 1)$  delle  $r$  tangentie fisse in  $B$  alla curva generica del fascio (\*) [ovvero  $s (> 1)$  delle  $r + \rho$  tangentie in  $B$  a quella curva che ivi possiede un punto  $(r + \rho)$ -plo (\*\*)] coincidono in una medesima retta, il numero dei punti doppi del fascio risulterà ancora diminuito, in generale, di altre  $s - 1$  unità.*

50. Suppongasi che le curve  $C$ ,  $C'$  (Teor. XLI) passino pel punto  $B$  ciascuna con  $r$  rami a tangentie distinte e diverse. Si ha in questo caso

$$V = r^2$$

ed in virtù del Teor. XL :

$$W = (2r - 1)^2 + 2(r - 1);$$

eppero

$$U = W - V = (r - 1)(3r + 1).$$

Donde il noto teorema : « Se un fascio possiede un punto base  $(r)$ -plo, i cui gruppi di tangentie alle singole curve costituiscono un'involuzione  $J'$  di grado  $r$  e prima specie senza raggi base, il numero

(\*) Per  $\rho = 1$  vedi Cremona, loco citato, n° 10.

(\*\*) Per  $r = 0$ ,  $\rho > 0$  e per  $r = 1$ ,  $\rho > 0$  vedi: Cremona, loco citato, n° 11, 12.

dei punti doppi del fascio sarà diminuito di  $(r - 1)(3r + 1)$  unità » (\*).

51. Nel fascio  $(C)$ , d'ordine  $n$ , vi sia un luogo composto di una curva  $K$  d'ordine  $v$ , contata  $\mu$  volte, e di una residuale curva semplice  $L$  d'ordine  $n-v\mu$ . In tale ipotesi qual'è, in generale, il numero  $\delta$  dei punti doppi del fascio che trovansi fuori di  $K$ ?

I luoghi  $\Phi'_P, \Phi'_Q$  (n° 46), corrispondenti a due punti  $P, Q$  fissati ad arbitrio nel piano, sono dell'ordine  $2n - v(\mu - 1) - 1$  e passano entrambi semplicemente (e senza toccarsi, in generale) per gli  $n\mu$  punti base di  $(C)$  giacenti su  $K$ , per gli  $n(n - v\mu)$  punti base di  $(C)$  giacenti su  $L$ , per i  $v(n - v\mu)$  punti comuni alle curve  $K$  ed  $L$  e finalmente per i  $2(n - 1) - v(\mu - 1)$  punti in cui la retta  $PQ$  è toccata da curve di  $(C)$  diverse dalla curva composta  $K.L$ . Epperò questi due luoghi s'incontreranno ulteriormente in

$$\begin{aligned}\delta &= [2n - v(\mu - 1) - 1]^2 - nv - n(n - v\mu) - v(n - v\mu) - [2(n - 1) - v(\mu - 1)] \\ &= 3(n - 1)^2 - v[3(n\mu - \mu + 1) - v(\mu^2 - \mu + 1) - 2n]\end{aligned}$$

punti, ciascuno dei quali sarà (n° 47) doppio per una curva del fascio  $(C)$ . Talchè :

**TEOREMA XLIV.** — *Se un fascio d'ordine  $n$  contiene un luogo composto, del quale fa parte una curva d'ordine  $v$  contata  $\mu$  volte, il numero dei punti doppi del fascio risulterà diminuito, in generale, di*

$$v[3(n\mu - \mu + 1) - v(\mu^2 - \mu + 1) - 2n]$$

unità.

52. Nelle ipotesi precedenti, suppongasi inoltre che un punto,  $B$ , della curva  $(\mu)$ -pla  $K$  sia, nel tempo istesso, punto base  $(\mu)$ -plo (a tangenti mobili) del fascio  $(C)$ . In tal caso i luoghi  $\Phi'_P, \Phi'_Q$  avranno in  $B$  un punto  $(\mu)$ -plo ed ivi per tangentи comuni i  $\mu - 1$  raggi doppi (diversi dalla tangente in  $B$  alla curva  $K$ ) dell'involtuzione di grado  $\mu$  e prima specie costituita dai gruppi di  $\mu$  tangentи

---

(\*) Cremona, I. c., n° 8.

in  $B$  alle singole curve del fascio (n° 46, a). Come sopra, i luoghi medesimi passeranno inoltre con un ramo (e senza toccarsi, in generale) per i residuali  $n - \mu$  punti base di  $(C)$  giacenti su  $K$ , per gli  $n(n - \mu)$  punti base di  $(C)$  giacenti su  $L$ , per i  $v(n - \mu)$  punti d'incontro delle curve  $K$  ed  $L$  e per i  $2(n - 1) - v(\mu - 1)$  punti di contatto della retta  $PQ$  con curve di  $(C)$ . Pertanto essi s'incontreranno ulteriormente in

$$\begin{aligned}\delta' &= [3n - v(\mu - 1) - 1]^2 - (\mu^2 + \mu - 1) - (n - \mu) - n(n - \mu) \\ &\quad - v(n - \mu) - [2(n - 1) - v(\mu - 1)] = \\ &= 3(n - 1)^2 - v[3(n\mu - \mu + 1) - v(\mu^2 - \mu + 1) - 2n] - (\mu^2 - 1)\end{aligned}$$

punti, ciascuno dei quali è doppio per una curva del fascio  $(C)$ . Di qui s'infierisce che nell'attuale ipotesi diminuisce di altre

$$\delta - \delta' = \mu^2 - 1$$

unità il numero dei punti doppi di  $(C)$ .

Epperò, estendendo questo risultato ad  $\alpha$  punti della curva  $K$  analoghi a  $B$  si ha la seguente proposizione :

**TEOREMA XLV.** — *Nelle ipotesi del Teorema XLIV, se  $\alpha$  punti distinti della curva  $(\mu)$ -pla sono, nel tempo istesso, punti base  $(\mu)$ -pli (a tangenti mobili) del fascio, il numero dei punti doppi del fascio sarà ulteriormente diminuito, in generale, di altre  $\alpha(\mu^2 - 1)$  unità.*

Come caso particolare, per

$$n = 3\mu, \quad v = 3, \quad \alpha = 9, \quad \mu \leq 1,$$

il fascio d'ordine  $3\mu$  dotato di 9 punti base  $(\mu)$ -pli a tangenti mobili avrà (Teoremi XLIV e XLV) :

$$\begin{aligned}3(3\mu - 1)^2 - 3[3(3\mu^2 - \mu + 1) - 3(\mu^2 - \mu + 1) - 6\mu] - \\ - 9(\mu^2 - 1) = 12\end{aligned}$$

punti doppi fuori della cubica [ $(\mu)$ -pla] individuata dagli anzidetti 9 punti base.

Quest'ultimo risultato è dovuto ad Halphen. (\*)

53. I metodi precedenti permettono di trattare facilmente altri casi, che per brevità omettiamo. Si ha così, ad es., la proposizione:

*Un fascio  $(A, B)$ , d'ordine  $m n$ , il quale contiene una curva  $(m)$ -pla  $A$  d'ordine  $n$  ed una curva  $(n)$ -pla  $B$  d'ordine  $m$  ( $\neq n$ ), possiede, in generale,*

$$\delta = (m+n)^2 - mn - 3(m+n-1)$$

*punti doppi fuori delle curve  $A$  e  $B$ .*

Per  $m=1$  si ha  $\delta=n(n-2)-1$ . Se inoltre è  $n=2$ , si ha  $\delta=1$ : Un fascio di coniche, il quale contiene una retta contata due volte, possiede un solo punto doppio fuori della retta medesima; è questo il punto d'incontro delle due tangenti fisse alla conica generica nei due punti base semplici del fascio. Etc. etc.

### § IX.

#### *Costruzione della Jacobiana di una rete mediante le curve $\Phi$ . — Esempi.*

54. Si consideri nel piano una rete d'ordine  $n$ :

$$[C] \equiv [C, C', C'']$$

(dove  $C, C', C''$  sono tre qualunque delle sue curve linearmente indipendenti).

La curva  $C$ , presa insieme ad una curva qualsiasi  $C^*$  del fascio  $(C', C'')$ , individua un fascio  $(C, C^*)$  contenuto nella rete  $[C]$ . Facendo variare  $C^*$  nel fascio  $(C, C'')$ , tutti i fasci analoghi a  $(C, C^*)$  esauriranno i fasci della rete  $[C]$ , in ciascuno dei quali è contenuta la curva  $C$ .

Ciò premesso, sia  $P$  un punto preso ad arbitrio nel piano. Per

(\*) Halphen, *Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles* (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. X, 1881-82, pp. 162-172), n° 10.

ogni fascio  $(C, C^*)$  si costruisca il relativo luogo  $\Phi_p$  (n° 39). Variando  $C^*$  nel fascio  $(C, C')$ , le curve  $\Phi_p$  relative ai singoli fasci  $(C, C^*)$  formeranno un sistema di curve semplicemente infinito, che indicherò con  $(\Phi_p)$ . Dico che per un punto  $a$ , assunto ad arbitrio nel piano, passa una, ed una sola, curva del sistema  $(\Phi_p)$ . Infatti, fra le curve della rete  $[C]$  ve n'è una, ed una sola,  $C_a$ , che è tangente in  $a$  alla retta  $Pa$ . Orz, la curva  $\Phi_p$  relativa al fascio  $(C, C_a)$  è la sola curva del sistema  $(\Phi_p)$ , la quale passi pel punto  $a$ . Epperò:

*Data una rete d'ordine  $n$*

$$[C] \equiv [C, C, C']$$

(dove  $C, C', C''$  sono tre qualunque delle sue curve linearmente indipendenti), indicando con  $C^*$  la curva generica del fascio  $(C, C')$  e con  $P$  un punto preso ad arbitrio nel piano, le curve  $\Phi_p$  relative a' singoli fasci  $(C, C^*)$  costituiscono, alla lor volta, un fascio,  $(\Phi_p)$ , dell'ordine  $2n - 1$ .

Una curva  $\Phi_p$  relativa ad un fascio  $(C, C^*)$  incontra la curva  $C$ : 1° negli  $n^2$  punti base del fascio  $(C, C^*)$ , i quali indicherò brevemente con  $(b)$ ; 2° in altri  $(2n - 1)n - n^2 = n(n - 1)$  punti,  $(p)$ , i quali sono punti di contatto delle tangenti condotte da  $P$  alla curva  $C$ . Conseguentemente, i  $(2n - 1)^2$  punti base del fascio  $(\Phi_p)$  sono: 1° gli  $n(n - 1)$  punti  $(p)$ ; 2° il punto  $P$ ; 3° altri

$$(2n - 1)^2 - n(n - 1) - 1 = 3n(n - 1)$$

punti fissi del piano.

Analogamente, assumendo nel piano un altro punto,  $Q$ , ed indicando con  $(q)$  il gruppo dei punti di contatto delle tangenti condotte da  $Q$  alla curva  $C$ , ogni curva  $\Phi_Q$  relativa ad un fascio  $(C, C^*)$  incontrerà la curva  $C$ : 1° negli  $n^2$  punti base  $(b)$  del fascio  $(C, C^*)$ ; 2° negli  $n(n - 1)$  punti  $(q)$ . Inoltre, il fascio  $(\Phi_Q)$  avrà per punti base: 1° gli  $n(n - 1)$  punti  $(q)$ ; 2° il punto  $Q$ ; 3° altri  $3n(n - 1)$  punti fissi del piano.

Ciò posto, facendo variare la curva  $C^*$  nel fascio  $(C, C')$  ed assumendo come corrispondenti due curve  $\Phi_p, \Phi_Q$  relative ad un

medesimo fascio ( $C, C^*$ ), si otterranno due fasci proiettivi ( $\Phi_P$ ), ( $\Phi_Q$ ), entrambi dell'ordine  $2n - 1$ , i quali genereranno un luogo,  $\Xi$ , dell'ordine  $2(2n - 1)$ . Si osservi ora che due curve corrispondenti  $\Phi_P, \Phi_Q$  [relativè ad un medesimo fascio ( $C, C^*$ )] s'incontrano:

- 1° nei  $2(n - 1)$  punti, (a), nei quali la retta  $PQ$  è tangente a curve del fascio ( $C, C^*$ );
- 2° negli  $n^2$  punti base (b) del fascio ( $C, C^*$ );
- 3° nei  $3(n - 1)^2$  punti doppi (d) del fascio ( $C, C^*$ ) (n° 47).

Ne segue dunque che la curva  $\Xi$ , luogo delle mutue intersezioni di due curve corrispondenti dei fasci proiettivi ( $\Phi_P$ ), ( $\Phi_Q$ ), si scinderà:

- 1° nella retta  $PQ$ , luogo dei punti (a);
- 2° nella curva  $C$ , luogo dei punti (b);
- 3° in una residuale curva,  $J$ , dell'ordine

$$2(2n - 1) - 1 - n = 3(n - 1),$$

che sarà il luogo dei punti (d), ossia il *luogo dei punti doppi della rete data [C]* (n° 24, b).

55. Si ha così una nuova costruzione geometrica della Jacobiana di una rete, indipendente dalla teoria delle polari. Siffatta costruzione conduce bensì facilmente a determinare il modo di comportarsi di questo luogo geometrico in un punto singolare della rete, per tutt'i casi considerati nel § VI. A titolo di esempi, nel n° seguente ci limiteremo a ritrovare gli enunciati dei Teoremi XXXI, XXXIV, XXXV e XXXVI.

Lo stesso metodo, opportunamente adoperato, può servire anche a risolvere le quistioni analoghe (parimenti trattate nel § VI) relative alla Jacobiana di tre curve che non siano tutte di uno stesso ordine (\*).

---

(\*) Dopo la pubblicazione della prima parte di queste Ricerche, l'egregio collega prof. F. Gerbaldi, in una Nota intitolata « *Sulle singolarità della Jacobiana di tre curve piane* » (questi Rendiconti, t. VIII, 1894, pp. 1-24), è pervenuto, con metodo algebrico, alla soluzione del seguente importante problema:  
 « Ricercare tutti i casi in cui un punto singolare, di molteplicità  $r_1, r_2, r_3$ , per tre curve algebriche piane ha per la Jacobiana una molteplicità maggiore di quella data in generale dalla formola  $r_1 + r_2 + r_3 - 2$ . »

56. Suppongasi che la rete  $[C]$  possieda un punto base ( $r$ )-plo  $O$  e contenga un fascio,  $(C)$ , dotato in  $O$  d'un punto base ( $r'$ )-plo, il quale contiene alla sua volta una curva,  $C''$ , che ha in  $O$  un punto ( $r''$ )-plo. Indicando con  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  tre curve della rete, linearmente indipendenti, le quali passano pel punto  $O$  rispettivamente con  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$  rami, a tangentи distinte e diverse, riterremo la rete come individuata da queste tre curve, epperò scriveremo :

$$[C] \equiv [C, C', C''].$$

Ciò premesso, proponiamoci d'investigare come si comporterà nel punto  $O$  la Jacobiana della rete  $[C]$ , in ciascuno dei seguenti casi :

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| a) $0 < r < r' < r''$ , | c) $0 < r < r' = r''$ , |
| b) $0 < r = r' < r''$ , | d) $0 < r = r' = r''$ . |

**CASO a).**  $0 < r < r' < r''$ . — In questo caso (Teor. I per  $k = 2$ ,  $r_2 > r_1 > r$ ,  $\varsigma_{1,m} = 0$ ; e Teor. II per  $p > 0$ ,  $q = 0$ ) le  $r$  tangentи in  $O$  alla curva generica della rete data  $[C] \equiv [C, C', C'']$  e le  $r'$  tangentи in  $O$  alla curva generica del fascio  $(C', C'')$ , in quella contenuto, sono fisse, le une e le altre.

Indicando con  $C^*$  la curva generica del fascio  $(C', C'')$ , pel Teor. II ciascun fascio  $(C, C^*)$  ha in  $O$  un punto base ( $r$ )-plo a tangentи fisse e coincidenti con le tangentи in  $O$  alla curva  $C$ , ed è tale inoltre che in esso è contenuta una curva,  $C^*$ , per la quale  $O$  è un punto multiplo del grado  $r' (> r)$ . In particolare, il fascio  $(C, C'')$  ha in  $O$  un punto base ( $r$ )-plo a tangentи fisse e coincidenti con le tangentи in  $O$  alla curva  $C$ , e contiene una curva,  $C''$ , per la quale  $O$  è un punto multiplo del grado  $r'' (> r)$ .

Ciò posto, si assumano nel piano due punti arbitrari  $P$  e  $Q$ .

In virtù del Teor. XXXIX il luogo  $\Phi_p^*$ , relativo al fascio generico  $(C, C^*)$ , avrà in  $O$  un punto  $(r + r' - 1)$ -plo, mentre in particolare il luogo  $\Phi_p''$ , relativo al fascio  $(C, C'')$ , avrà in  $O$  un punto multiplo del grado  $r + r'' - 1 (> r + r' - 1)$ . Dunque (Teor. I) : il fascio  $(\Phi_p)$  ha in  $O$  un punto base  $(r + r' - 1)$ -plo,

a tangenti fisse, e contiene una curva,  $\Phi''_p$ , per la quale  $O$  è un punto  $(r + r'' - 1)$ -plo.

Analogamente: il fascio  $(\Phi_Q)$  ha in  $O$  un punto base  $(r + r' - 1)$ -plo, a tangenti fisse, e contiene una curva  $\Phi''_Q$  [il luogo relativo al fascio  $(C, C')$ ], per la quale  $O$  è un punto  $(r + r'' - 1)$ -plo.

Si ottengono così due fasci proiettivi  $(\Phi_p)$ ,  $(\Phi_Q)$ , i quali posseggono in  $O$ , l'uno e l'altro, un punto base del grado  $r + r' - 1$ , e contengono due curve corrispondenti  $\Phi''_p$ ,  $\Phi''_Q$ , per ciascuna delle quali  $O$  è un punto multiplo del grado  $r + r'' - 1$ . Pertanto, conducendo pel punto  $O$  una trasversale arbitraria ed applicando a questa retta il Lemma di Cremona (2<sup>a</sup> nota del n° 16) si trova immediatamente che la curva

$$\Xi \equiv PQ. \quad C. \quad J$$

(n° 54), generata dai due fasci proiettivi  $(\Phi_p)$ ,  $(\Phi_Q)$ , ha in  $O$  un punto multiplo del grado

$$2(r + r' - 1) + (r'' - r') = 2r + r' + r'' - 2.$$

Donde si conclude che la Jacobiana  $J$  della rete  $[C]$  ha in  $O$  un punto multiplo del grado

$$(2r + r' + r'' - 2) - r = r + r' + r'' - 2.$$

Si ritrova così il Teorema XXXI.

CASO b).  $r < r = r' < r''$ . — In questo caso (n° 11) la rete  $[C] \equiv [C, C', C'']$ : 1° possiede in  $O$  un punto base ( $r$ )-plo, i cui gruppi di tangenti alle singole curve costituiscono un'involuzione di raggi,  $J'_r$ , di grado  $r$  e prima specie (individuata dai due gruppi di  $r$  tangenti in  $O$  alle curve  $C$  e  $C'$ ); 2° contiene una curva,  $C''$ , per la quale  $O$  è un punto multiplo del grado  $r'' (> r)$ .

Sia  $C^*$  la curva generica del fascio  $(C, C'')$ . Pel Teor. II ogni fascio  $(C, C^*)$  ha in  $O$  un punto base ( $r$ )-plo, i cui gruppi di tangenti generano l'involuzione  $J'_r$ ; in particolare, il fascio  $(C, C'')$  ha in  $O$  un punto base ( $r$ )-plo a tangenti fisse (coincidenti con le tan-

genti in  $O$  alla curva  $C$ ) e contiene una curva,  $C''$ , per la quale  $O$  è un punto multiplo del grado  $r'' (> r)$ .

Nello assumere, come sopra, i due punti  $P$  e  $Q$  facciamo che uno di essi, ad es.  $Q$ , sia il punto  $O$ ; e cerchiamo di conoscere come si comporta in  $O$  ciascuno dei fasci proiettivi  $(\Phi_P)$  e  $(\Phi_Q)$ .

Per il Teor. XL il luogo  $\Phi_P^*$ , relativo al fascio generico  $(C, C')$ , ha in  $O$  un punto  $(2r - 1)$ -plo, le cui tangenti in  $O$  sono: la retta  $PO$  ed i  $2(r - 1)$  raggi doppi dell'involuzione  $J_r$ , i quali indicheremo brevemente con  $(D)$ ; in particolare, il luogo  $\Phi_P''$ , relativo al fascio  $(C, C'')$ , ha in  $O$  un punto multiplo del grado  $r + r'' - 1$  ( $> 2r - 1$ ) (Teor. XXXIX).

D'altra parte, per il Teor. XXXVIII il luogo  $\Phi_Q^*$ , relativo al fascio generico  $(C, C')$ , ha in  $O$  un punto  $(2r + 1)$ -plo; ed in particolare (Teor. XXXVII), il luogo  $\Phi_Q''$ , relativo al fascio  $(C, C'')$ , possiede in  $O$  un punto multiplo del grado  $r + r'' (\leq 2r + 1)$  ed ha ivi per tangenti le  $r$  tangenti in  $O$  alla curva  $C$  e le  $r''$  tangenti in  $O$  alla curva  $C''$ .

Si ottengono così due fasci proiettivi  $(\Phi_P)$ ,  $(\Phi_Q)$ , i quali hanno in  $O$ , rispettivamente, un punto base  $(2r - 1)$ -plo,  $(2r + 1)$ -plo e contengono due curve corrispondenti  $\Phi_P''$ ,  $\Phi_Q''$  [i luoghi relativi al fascio  $(C, C'')$ ], la prima delle quali ha in  $O$  un punto  $(r + r'' - 1)$ -plo, mentre la seconda ha in  $O$  un punto  $(r + r'')$ -plo, le cui tangenti coincidono con le  $r$  tangenti in  $O$  alla curva  $C$  e le  $r''$  tangenti in  $O$  alla curva  $C''$ .

Ora, applicando il Lemma di Cremona (2<sup>a</sup> nota del n° 16):

- 1° ad una retta condotta ad arbitrio pel punto  $O$ ;
  - 2° ad una qualsiasi delle  $2(r - 1)$  rette  $(D)$ ;
  - 3° ad una qualsiasi delle  $r''$  tangenti in  $O$  alla curva  $C''$ ;
- si trova, ordinatamente, che il luogo

$$\Xi \equiv PO. C. J,$$

generato dai due fasci proiettivi  $(\Phi_P)$ ,  $(\Phi_Q)$ :

- 1° passa con  $3r + r'' - 1$  rami pel punto  $O$ ;
- 2° ha ivi per tangenti le  $2(r - 1)$  rette  $(D)$ ;
- 3° ha ivi inoltre per tangenti le  $r''$  tangenti in  $O$  alla curva  $C''$ .

Donde si conclude, che la Jacobiana  $J$  della rete  $[C] \equiv [C, C, C']$   
 « passa con

$$(3r + r'' - 1) - 1 - r = 2(r - 1) + r''$$

- « rami pel punto  $O$  ed ha ivi per tangentи i  $2(r - 1)$  raggi doppi
- « dell'involuzione  $J_r'$  e le  $r''$  tangentи in  $O$  alla curva  $C''$ . In particolare, « se l'involuzione  $J_r'$  ha un raggio base ( $\sigma$ )-plo ( $\sigma \leq r - 1$ ),
- « in questo raggio coincideranno  $2\sigma$  tangentи in  $O$  alla Jacobiana;
- « e se l'involuzione  $J_r'$  ha un raggio base ( $\sigma$ )-plo ( $\sigma \leq r - 1$ ), che
- « è nel tempo istesso raggio ( $\sigma_1$ )-plo ( $\sigma_1 > \sigma + 1$ ) per uno dei suoi
- « gruppi, in questo raggio coincideranno  $\sigma + \sigma_1 - 1$  tangentи in  $O$
- « alla Jacobiana » (\*).

Rimane così dimostrato il Teorema XXXIV.

CASO c).  $0 < r < r' = r''$ . — In questo caso la rete  $[C] \equiv [C, C', C'']$ : 1° possiede in  $O$  un punto base ( $r$ )-plo a tangentи fisse (le  $r$  tangentи in  $O$  alla curva  $C$ ) (Teor. III, ponendo ivi  $k = 2$ ,  $b = 0$ ,  $q = 0$ ); 2° contiene un fascio,  $(C', C'')$ , dotato in  $O$  d'un punto base ( $r'$ )-plo, i cui gruppi di tangentи alle singole curve costituiscono un'involuzione,  $J_{r'}$ , di grado  $r'$  e prima specie (Teor. II, b, ponendo ivi  $q = 0$ ).

Nel seguire il procedimento del n° 54 scambiamo di posto le curve  $C$  e  $C'$ , e scriviamo

$$[C] \equiv [C'', C', C].$$

Se  $C^*$  è la curva generica del fascio  $(C', C)$ , pel Teor. II ogni fascio  $(C'', C^*)$  ha in  $O$  un punto base ( $r$ )-plo a tangentи fisse, le quali coincidono con le  $r$  tangentи in  $O$  alla curva  $C$ , e contiene una curva,  $C''$ , per la quale  $O$  è un punto multiplo del grado  $r' (> r)$ . In particolare, il fascio  $(C'', C')$  ha in  $O$  un punto base ( $r'$ )-plo a tangentи mobili.

Ciò posto, proponiamoci di conoscere come si comportano in () i fasci proiettivi  $(\Phi_p)$ ,  $(\Phi_o)$ .

---

(\*) Due proposizioni, etc., Lemma II (ponendo ivi  $t = 1$ ).

Il luogo  $\Phi_p^*$ , relativo al fascio generico  $(C'', C')$ , avrà in  $O$  un punto  $(r + r' - 1)$ -plo (Teor. XXXIX). In particolare, il luogo  $\Phi'_p$ , relativo al fascio  $(C'', C')$ , passerà pel punto  $O$  con  $2r' - 1$  ( $> r + r' - 1$ ) rami,  $2(r' - 1)$  dei quali avranno ivi per tangentì i  $2(r' - 1)$  raggi doppi dell'involuzione  $J_r$  (Teor. XL), i quali indicheremo brevemente con  $(D)$ .

Il luogo  $\Phi_0^*$ , relativo al fascio generico  $(C'', C')$ , avrà in  $O$  un punto  $(r+r')$ -plo ed ivi le stesse tangenti delle curve  $C''$  e  $C'$  (Teor. XXXVII), ossia le stesse tangenti delle curve  $C''$  e  $C$ . In particolare, il luogo  $\Phi'_0$ , relativo al fascio  $(C'', C')$ , avrà in  $O$  un punto multiplo del grado  $2r' + 1$  ( $> r + r'$ ) (Teor. XXXVIII).

Si ottengono così due fasci proiettivi  $(\Phi_p)$ ,  $(\Phi_0)$ , il primo dei quali ha in  $O$  un punto base  $(r + r' - 1)$ -plo a tangentì fisse ed il secondo un punto base  $(r+r')$ -plo a tangentì fisse e coincidenti con le  $r$  ed  $r'$  tangentì in  $O$  alle curve  $C$  e  $C''$ . Questi due fasci contengono due curve corrispondenti  $\Phi'_p$ ,  $\Phi'_0$  [i luoghi relativi al fascio  $(C'', C')$ ], la prima delle quali ha in  $O$  un punto multiplo del grado  $2r' - 1$  ( $> r + r' - 1$ ), con  $2(r' - 1)$  rami tangentì alle rette  $(D)$ , mentre la seconda ha in  $O$  un punto multiplo del grado  $2r' + 1$  ( $> r + r'$ ).

Pertanto, applicando il Lemma di Cremona (2<sup>a</sup> nota del n° 16):

- 1° ad una retta condotta ad arbitrio pel punto  $O$ ;
  - 2° ad una qualsiasi delle  $2(r' - 1)$  rette  $(D)$ ;
  - 3° ad una qualsiasi delle  $r$  tangentì in  $O$  alla curva  $C$ ;
- si trova, successivamente, che il luogo

$$\Xi' \equiv PO. C''. J,$$

generato dai due fasci proiettivi  $(\Phi_p)$ ,  $(\Phi_0)$ :

- 1° passa pel punto  $O$  con  $r + 3r' - 1$  rami;
  - 2° ha ivi per tangentì le  $2(r' - 1)$  rette  $(D)$ ;
  - 3° ha ivi inoltre per tangentì le  $r$  tangentì in  $O$  alla curva  $C$ .
- Di qui si conclude, che la Jacobiana  $J$  della rete  $[C] \equiv [C, C', C'']$  passa con

$$(r + 3r' - 1) - 1 - r' = r + 2(r' - 1)$$

« rami pel punto  $O$  ed ha ivi per tangentи le  $r$  tangentи fisse della rete (le tangentи in  $O$  alla curva  $C$ ) ed i  $2(r' - 1)$  raggi doppi dell'involuzione,  $J'_r$ , costituita dai gruppi di tangentи in  $O$  alle curve del fascio  $(C', C'')$ . In particolare (\*), « se l'involuzione  $J'_r$  possiede un raggio base  $(\sigma)$ -plo ( $\sigma \leq r' - 1$ ), in questo raggio coincideranno  $2\sigma$  tangentи in  $O$  alla Jacobiana; e se l'involuzione  $J'_r$  possiede un raggio base  $(\sigma)$ -plo ( $\sigma \leq r' - 1$ ), che è nel tempo istesso raggio  $(\sigma_1)$ -plo ( $\sigma_1 > \sigma + 1$ ) per uno dei suoi gruppi, in questo raggio coincideranno  $\sigma + \sigma_1 - 1$  tangentи in  $O$  alla Jacobiana ».

Rimane così dimostrato per altra via il Teorema XXXV.

**CASO d).**  $0 < r = r' = r''$ .—In questo caso, supposto  $r > 1$  (\*\*), la rete  $[C] \equiv [C, C', C'']$  possiede in  $O$  un punto base  $(r)$ -plo, i cui gruppi di tangentи alle singole curve costituiscono un'involuzione di grado  $r$  e seconda specie (Teor. I, nota). Con gli stessi procedimenti più sopra adoperati [cfr. il caso b)] si trova subito che i fasci proiettivi  $(\Phi_p)$ ,  $(\Phi_o)$  hanno in  $O$ , rispettivamente, un punto base  $(2r - 1)$ -plo,  $(2r + 1)$ -plo e non contengono curve dotate in  $O$  risp. d'un punto multiplo di grado  $> 2r - 1$ ,  $> 2r + 1$ . Onde, applicando il Lemma di Cremona (2<sup>a</sup> nota del n° 16) ad una trasversale condotta ad arbitrio pel punto  $O$ , si trova che il luogo

$$\Xi \equiv PO. C. J,$$

generato dai due fasci proiettivi  $(\Phi_p)$ ,  $(\Phi_o)$ , passa con

$$(2r - 1) + (2r + 1) = 4r$$

rami pel punto  $O$ .

Di qui si conclude che la Jacobiana  $J$  della rete  $[C] \equiv [C, C', C'']$  ha in  $O$  un punto multiplo del grado

$$4r - 1 - r = 3r - 1.$$

Con che si ritrova il Teorema XXXVI.

(\*) Due proposizioni, etc., Lemma II (ponendo ivi  $t = 1$ ).

(\*\*) Per  $r = 1$ , la tangente in  $O$  alla curva generica della rete genera un'involuzione di grado e specie uno (un fascio di raggi). In questo caso la rete contiene una curva dotata in  $O$  d'un punto doppio [Teor. IV, nota, Esempio d)], epperò si ricade nel Caso b) più sopra considerato.

## §. X

*La rete [Φ] relativa ad un fascio di curve;  
sua Jacobiana: la curva Σ.*

57. Sia dato nel piano un fascio di curve, ( $C$ ), dell'ordine  $n$ .

Ad ogni punto  $P$  del piano è associata una curva  $\Phi_P$  (n° 39), dell'ordine  $2n - 1$ , luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da  $P$  alle curve di ( $C$ ). Siccome i punti  $P$  del piano sono in numero  $\infty^2$ , così tutte le curve  $\Phi_P$ , relative al fascio ( $C$ ), costituiranno un sistema di curve  $\infty^2$ , che indicherò con [ $\Phi$ ]. Dico che per due punti qualunque del piano  $a$  e  $b$  passa una, ed una sola, curva del sistema [ $\Phi$ ]. Infatti, pei punti  $a$  e  $b$  passano due curve del fascio ( $C$ ), le cui tangenti risp. in  $a$  e in  $b$  s'incontrano in un punto,  $Q$ , del piano. Il luogo  $\Phi_Q$ , relativo al fascio ( $C$ ), è quella curva, unica, del sistema, la quale passa per  $a$  e per  $b$ . Epperò: *Tutte le curve  $\Phi_P$  relative al fascio dato ( $C$ ) costituiscono nel piano una rete, [ $\Phi$ ], dell'ordine  $2n - 1$ .*

58. Suppongasi che il fascio ( $C$ ) sia generale, e si indichino brevemente con ( $b$ ) i suoi  $n^2$  punti base semplici e con ( $d$ ) i suoi  $3(n - 1)^2$  punti doppi (n° 47).

α) La rete [ $\Phi$ ], relativa al fascio ( $C$ ), possiede

$$n^2 + 3(n - 1)^2 = 2n(2n - 3) + 3$$

punti base semplici a tangente mobile, cioè: gli  $n^2$  punti ( $b$ ) (n° 44) ed i  $3(n - 1)^2$  punti ( $d$ ) (n° 43).

β) Due curve qualunque della rete [ $\Phi$ ],  $\Phi_P$  e  $\Phi_Q$ , s'incontrano in

$$(2n - 1)^2 - [2n(2n - 3) + 3] = 2(n - 1)$$

punti della retta  $PQ$ . Sono questi i punti in cui la retta  $PQ$  è tangente a curve del fascio ( $C$ ).

γ) Se un punto  $P$  descrive nel piano una retta  $R$ , la corrispondente curva  $\Phi_P$ , della rete [ $\Phi$ ], genera un fascio, ( $\Phi_R$ ), dell'ordine

$2n - 1$ . I  $(2n - 1)^2$  punti base semplici del fascio  $(\Phi_R)$  sono: gli  $n^2$  punti  $(b)$ , i  $3(n - 1)^2$  punti  $(d)$  ed i  $2n - 1$  punti in cui la retta  $R$  è tangente a curve del fascio  $(C)$ .

Reciprocamente: Se una curva  $\Phi_P$ , della rete  $[\Phi]$ , genera un fascio  $(\Phi)$ , il corrispondente punto  $P$  descrive una retta,  $R$ , sulla quale giacciono i residuali  $2(n - 1)$  punti base del fascio  $(\Phi)$ , diversi dai punti  $(b)$  e  $(d)$ .

Per tal modo, dato nel piano un fascio  $(C)$  d'ordine  $n$ , fra i punti  $P$  e le curve  $\Phi_P$  della rete  $[\Phi]$ , relativa a  $(C)$ , interviene una corrispondenza, tale che: ad un punto  $P$  corrisponde una, ed una sola, curva  $\Phi_P$ ; e ad una curva  $\Phi_P$  corrisponde uno, ed un solo, punto  $P$ . Inoltre: quando un punto  $P$  descrive una retta  $R$ , la corrispondente curva  $\Phi_P$  genera un fascio  $(\Phi)_R$  [che ha  $2(n - 1)$  dei suoi punti base sulla retta  $R$ ]; e viceversa: quando una curva  $\Phi_P$  genera un fascio  $(\Phi)_R$  [ $R$  essendo la retta che contiene i  $2(n - 1)$  punti base del fascio, diversi da  $(b)$  e da  $(d)$  (vedi più sopra, §)], il corrispondente punto  $P$  descrive una retta,  $R$ .

Siffatta corrispondenza fra i punti  $P$  e le curve  $\Phi_P$  trae con sè un'altra corrispondenza fra i punti  $P$  e le rette  $R$  del piano: Dato un punto  $P$ , rimane individuata una, ed una sola, retta  $R$  passante per  $P$  (luogo dei punti le cui corrispondenti curve  $\Phi$  passano per  $P$ ); viceversa: data una retta  $R$ , rimane individuato sulla medesima un gruppo di  $2(n - 1)$  punti  $P$  [costituito dai punti base, diversi da  $(b)$  e da  $(d)$ , del fascio di curve  $\Phi$  corrispondenti a' punti di  $R$ ; ossia: dai punti in cui la retta  $R$  è tangente a curve del fascio  $(C)$ ].

δ) La rete  $[\Phi]$  contiene  $n^2$  curve, ciascuna delle quali ha un punto triplo in uno dei punti base del fascio  $(C)$ . Invero, se  $b$  è uno qualsiasi degli  $n^2$  punti  $(b)$ , il luogo  $\Phi_b$  passa pel punto  $b$  con tre rami a tangentì distinte, ciascuna delle quali è tangente stazionaria in  $b$  per una curva del fascio  $(C)$  (Teor. XXXVIII).

ε) Il luogo dei punti doppi delle curve  $\Phi$  relative al fascio dato  $(C)$ , ossia la Jacobiana della rete  $[\Phi]$ , è una curva dell'ordine

$$3[(2n - 1) - 1] = 6(n - 1)$$

(n° 24, b; n° 54), che indicheremo con  $\Sigma$ .

59. Nella rete  $[\Phi]$ , relativa al fascio dato  $(C)$ , sia  $\Phi_Q$  una curva

dotata d'un punto doppio,  $M$ . Per il punto  $M$  passano infinite curve della rete  $[\Phi]$  formanti un fascio,  $(\Phi)$ , nel quale è contenuta la curva  $\Phi_Q$ . Sia  $\Phi_P$  un'altra curva di questo fascio e  $T$  la relativa tangente in  $M$ . Tutte le curve del fascio  $(\Phi) \equiv (\Phi_P, \Phi_Q)$ , eccetto  $\Phi_Q$ , passano semplicemente per il punto  $M$  e toccano ivi la retta  $T$  (Teor. II). Poichè la retta  $T$  contiene, riuniti in  $M$ , due dei  $2(n - 1)$  punti base di  $(\Phi)$  diversi dai punti  $(b)$  e  $(d)$ , ne segue che essa conterrà i rimanenti  $2(n - 1) - 2$ ; epperò (n° 58, γ) la retta  $T$  sarà il luogo dei punti  $P$  corrispondenti alle curve del fascio  $(\Phi) \equiv (\Phi_P, \Phi_Q)$ . Conseguentemente, la retta  $T$  conterrà anche il punto  $Q$ . Dunque:

a) *Se un punto  $Q$  del piano è tale che la corrispondente curva  $\Phi_Q$  ha un punto doppio,  $M$ , le curve  $\Phi_P$  corrispondenti ai punti  $P$  della retta  $QM$  saranno tangenti in  $M$  alla retta  $QM$ .*

b) Reciprocamente (cfr. Teor. V, nota): *Se due, epperò infinite, curve della rete  $[\Phi]$  si toccano in un punto,  $M$ , i corrispondenti punti  $P$  si troveranno sulla loro tangente comune in  $M$ . Fra i punti di questa retta ve ne sarà uno,  $Q$ , la cui corrispondente curva  $\Phi_Q$  avrà un punto doppio in  $M$ .*

60. Nella rete  $[\Phi]$ , relativa al fascio dato  $(C)$ , sia  $\Phi_Q$  una curva dotata d'un punto doppio,  $M$ . Poichè la curva  $\Phi_Q$  passa semplicemente per  $Q$  (n° 39; n° 41, α), ne segue che la retta  $QM$  è incontrata dalla curva medesima, oltre  $Q$  ed  $M$ , in

$$(2n - 1) - 1 - 2 = 2n - 4$$

punti. Ora, essendo questi i punti doppi, diversi da  $M$ , dell'involuzione di grado  $n$  e prima specie costituita dai gruppi di punti in cui la retta  $QM$  è incontrata dalle curve del fascio  $(C)$ , se ne conclude che

$$2(n - 1) - (2n - 4) = 2$$

dei  $2(n - 1)$  punti doppi di detta involuzione sono assorbiti dal punto  $M$ . Ma in tal caso  $M$  è punto triplo per un gruppo della involuzione medesima, val quanto dire che la curva del fascio  $(C)$  la

quale passa pel punto  $M$  ha ivi tre intersezioni riunite con la retta  $QM$ . Dunque :

*Se una curva  $\Phi_Q$ , corrispondente ad un punto  $Q$ , ha un punto doppio  $M$ , quella curva del fascio ( $C$ ) che passa per  $M$  ha ivi un flesso, la cui tangente stazionaria è la retta  $QM$ .*

61. Siano :  $P$  un punto preso ad arbitrio nel piano;  $\Phi_P$  la corrispondente curva della rete [ $\Phi$ ];  $N$  il punto di contatto di una qualsiasi delle tangenti che si possono condurre da  $P$  alla curva  $\Phi_P$ . Poichè la curva  $\Phi_P$  passa semplicemente pel punto  $P$  (n° 39; n° 41, α), ne segue che la retta  $PN$  è incontrata dalla curva medesima, oltre  $P$  ed  $N$ , in

$$(2n - 1) - 1 - 2 = 2n - 4$$

punti. Ora, essendo questi i punti doppi, diversi da  $N$ , dell'involuzione di grado  $n$  e prima specie costituita dai gruppi di punti in cui la retta  $PN$  è incontrata dalle curve del fascio ( $C$ ), se ne conclude che

$$2(n - 1) - (2n - 4) = 2$$

dei  $2(n - 1)$  punti doppi di detta involuzione rimangono assorbiti dal punto  $N$ . Ma in questo caso  $N$  è punto triplo per un gruppo della involuzione medesima; epperò quella curva del fascio ( $C$ ), la quale passa per  $N$ , ha in questo punto tre intersezioni riunite con la retta  $PN$ ; e conseguentemente, tutte le curve  $\Phi$  corrispondenti a' punti della retta  $PN$  sono tangenti in  $N$  alla retta  $PN$ , e fra esse ve n'è una (n° 59, β) dotata d'un punto doppio in  $N$ . Dunque :

*Se  $N$  è il punto di contatto di una qualsiasi delle tangenti che si possono condurre da un punto  $P$  (preso ad arbitrio nel piano) alla corrispondente curva  $\Phi_P$ :*

a) *Quella curva del fascio ( $C$ ) che passa per  $N$  ha in questo punto un flesso, la cui tangente stazionaria è la retta  $PN$ .*

b) *Le curve  $\Phi$  corrispondenti ai punti della retta  $PN$  [le quali formano un fascio (n° 58, γ)] sono tangenti in  $N$  alla retta  $PN$ . Fra esse ve n'è una per la quale  $N$  è un punto doppio.*

62. Da quanto precede (n° 58, 59; 60; 61) discende la seguente proposizione :

**TEOREMA XLVI.**—*Dato nel piano un fascio di curve ( $C$ ), d'ordine  $n$ , la Jacobiana della rete [ $\Phi$ ], relativa al fascio ( $C$ ) (n° 57), è una curva,  $\Sigma$ , dell'ordine  $6(n - 1)$  (n° 58, 59), alla quale sono da attribuire le seguenti definizioni :*

- a) *Luogo dei punti doppi della rete [ $\Phi$ ].*
- b) *Luogo di un punto in cui due, eppero infinite, curve della rete [ $\Phi$ ] si toccano.*
- c) *Luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto generico  $P$  alla corrispondente curva  $\Phi_P$ .*
- d) *Luogo dei punti di flesso delle curve del fascio ( $C$ ) (\*).*

63. Suppongasi che il fascio dato ( $C$ ) possegga un punto base  $B$  di grado  $r (\geq 0)$  e contenga una curva,  $C'$ , che ha in  $B$  un punto  $(r + \rho)$ -plo ( $\rho > 0$ ) [Caso a) del n° 40].

In queste ipotesi come si comporterà nel punto  $B$  il luogo  $\Sigma$  relativo al fascio ( $C$ )?

Indichiamo brevemente con  $\Delta$ , il gruppo delle  $r$  tangenti fisse in  $B$  alla curva generica del fascio ( $C$ ) e con  $\Delta'_{r+\rho}$  il gruppo delle  $r + \rho$  tangenti in  $B$  alla curva  $C'$ . La curva  $\Phi_P$ , corrispondente ad un punto arbitrario  $P$  del piano, passa con  $2r + \rho - 1$  rami pel punto  $B$  ed ha ivi per tangentи i  $2r + \rho - 1$  raggi doppi (diversi da  $t = PB$ ) dell'involuzione di grado  $r + \rho$  e prima specie individuata dai due gruppi di  $r + \rho$  raggi:  $\Delta, t^{\rho}, \Delta'_{r+\rho}$  (Teor. XXXIX). In particolare, la curva  $\Phi_B$ , corrispondente al punto  $B$ , passa con  $2r + \rho (> 2r + \rho - 1)$  rami pel punto  $B$  ed ha ivi per tangentи le  $r$  tangenti fisse del fascio ( $C$ ) e le  $r + \rho$  tangenti della curva  $C'$  (Teor. XXXVII).

(\*) Il luogo  $\Sigma$  (qui ottenuto come Jacobiana della rete costituita da tutte le curve  $\Phi$  relative ad un fascio), come luogo dei flessi del fascio era già stato considerato dal sig. B o b e k, il quale ne aveva determinato l'ordine  $6(n - 1)$  e la classe  $6(n - 2)(4n - 3)$ . Cfr. D o e h l e m a n n, *Ueber lineare Systeme in der Ebene und im Raum und über deren Jacob'sche Curve beziehungsweise Jacob'sche Fläche* (Math. Ann., XLI, 1893, pp. 545-570), pp. 553-554.

Di qui s'infierisce (n° 11) che, nelle ipotesi attuali, la rete  $[\Phi]$ , relativa al fascio dato ( $C$ ), ha in  $B$  un punto base  $(2r + \rho - 1)$ -plo, i cui gruppi di tangenti alle singole curve costituiscono un'involuzione,  $J_{2r+\rho-1}$ , di grado  $2r + \rho - 1$  e prima specie, e contiene una curva,  $\Phi_B$  (corrispondente al punto  $B$ ), la quale passa per  $B$  con  $2r + \rho$  ( $> 2r + \rho - 1$ ) rami ed ha ivi per tangentи le  $r$  rette  $\Delta$ , e le  $r + \rho$  rette  $\Delta'_{r+\rho}$ . Dunque (Teor. XXXIV, ovvero n° 56, b): la Jacobiana della rete  $[\Phi]$ , ossia la curva  $\Sigma$ , passerà con

$$2[(2r + \rho - 1) - 1] + (2r + \rho) = 3(2r + \rho) - 4$$

rami pel punto  $B$  ed avrà ivi per tangentи: i  $2(2r + \rho - 2)$  raggi doppi dell'involuzione  $J_{2r+\rho-1}$ , le  $r$  rette  $\Delta$ , e le  $r + \rho$  rette  $\Delta'_{r+\rho}$ .

Si ha quindi la seguente proposizione:

**TEOREMA XLVII.**—Se un fascio possiede un punto base  $B$  di grado  $r (\geq 0)$  e contiene una curva,  $C'$ , dotata in  $B$  d'un punto  $(r + \rho)$ -plo ( $\rho > 0$ ), la relativa curva  $\Sigma$  (Teor. XLVI) passa, in generale, pel punto  $B$  con  $3(2r + \rho) - 4$  rami,  $2r + \rho$  dei quali toccano in  $B$  le  $r$  tangentи fisse della curva generica del fascio e le  $r + \rho$  tangentи della curva  $C'$ .

64. Posto  $r = 0$  nelle ipotesi del n° precedente, suppongasi che  $s (< \rho)$  delle  $\rho$  tangentи in  $B$  alla curva  $C'$  coincidano in una medesima retta,  $\tau$ ; per il che, mantenendo le superiori notazioni, scriveremo:  $\Delta'_\rho \equiv \tau' \Delta'_{\rho-s}$ .

La curva  $\Phi_p$ , corrispondente ad un punto arbitrario  $P$  del piano, ha in  $B$  un punto  $(\rho - 1)$ -plo, le cui tangentи sono: la retta  $\tau$  contata  $s - 1$  volte ed i  $\rho - s$  raggi doppi (diversi da  $t \equiv PB$  e da  $\tau$ ) dell'involuzione di grado  $\rho$  e prima specie individuata dai due gruppi di  $\rho$  raggi:  $t^\rho$ ,  $\tau' \Delta'_{\rho-s}$  (n° 43). In particolare: 1° La curva  $\Phi_{p'}$ , corrispondente ad un punto arbitrario  $P'$  della retta  $\tau$ , ha in  $B$  un punto  $(\rho - 1)$ -plo, le cui tangentи sono: la retta  $\tau$  contata  $s$  volte ed i  $\rho - s - 1$  raggi doppi (diversi da  $\tau$ ) dell'involuzione di grado  $\rho - s$  e prima specie individuata dai due gruppi di  $\rho - s$  raggi:  $\tau^{\rho-s}$ ,  $\Delta'_{\rho-s}$  (n° 45, a). 2° La curva  $\Phi_B$ , corrispondente al punto  $B$ , ha in  $B$  un punto  $(\rho)$ -plo ed ivi le stesse tangentи della curva  $C'$ , cioè: la retta  $\tau$  contata  $s$  volte e le  $\rho - s$  rette  $\Delta'_{\rho-s}$  (n° 41).

Segue da ciò (n° 11), che delle stesse ipotesi la rete  $[\Phi]$ , relativa al fascio dato  $(C)$ : 1° ha in  $B$  un punto base  $(s-1)$ -plo, i cui gruppi di tangentи alle singole curve costituiscono un'involtuzione,  $J_{s-1}'$ , di grado  $s-1$  e prima specie, con un raggio base  $(s-1)$ -plo nella retta  $\tau$ ; il gruppo di  $J_{s-1}'$ , per il quale  $\tau$  è raggio  $(s)$ -plo essendo costituito dalle  $s-1$  tangentи fisse in  $B$  alla curva generica del fascio  $(\Phi_p)$ ; 2° contiene una curva,  $\Phi_B$ , che ha in  $B$  un punto  $(s)$ -plo, le cui tangentи sono: la retta  $\tau$  contata  $s$  volte e le  $p-s$  rette  $\Delta'$ .

Dunque (Teor. XXXIV, ovvero n° 56, b): nella retta  $\tau$ , considerata come raggio base  $(s-1)$ -plo dell'involtuzione  $J_{s-1}'$ , verranno a coincidere  $2(s-1)$  tangentи in  $B$  alla Jacobiana della rete  $[\Phi]$ ; e nella medesima retta, considerata come quella in cui trovansi riunite  $s$  tangentи in  $B$  alla curva  $\Phi_B$ , verranno anzidio a coincidere  $s$  tangentи in  $B$  alla Jacobiana della rete  $[\Phi]$ . Conseguentemente, delle  $3p-4$  tangentи in  $B$  alla curva  $\Sigma$  (Teor. XLVI e XLVII), ve ne saranno

$$2(s-1) + s = 3s - 2,$$

le quali coincidono nella retta  $\tau$ . Epperò (Teor. XLVII):

**Teorema XLVIII.** — *Se un fascio contiene una curva,  $C'$ , dotata d'un punto  $(p)$ -plo  $B$ , con  $s (< p)$  tangentи coincidenti in una medesima retta  $\tau$ , la relativa curva  $\Sigma$  (Teor. XLVI) ha in  $B$ , in generale, un punto  $(3p-4)$ -plo, le cui tangentи sono: la retta  $\tau$  contata  $3s-2$  volte e le residuali  $p-s$  tangentи in  $B$  alla curva  $C'$ .*

65. Posto  $r=0$  nelle ipotesi del n° 63, suppongasi che tutte le  $p$  tangentи in  $B$  alla curva  $C'$  coincidano in una medesima retta,  $\tau$ .

La curva  $\Phi_p$ , corrispondente ad un punto arbitrario  $P$  del piano, ha in  $B$  un punto  $(p-1)$ -plo, le cui tangentи coincidono tutte nella retta  $\tau$  (n° 43). In particolare: la curva  $\Phi_{p'}$ , corrispondente ad un punto arbitrario  $P'$  della retta  $\tau$ , ha in  $B$  un punto  $(p)$ -plo, il cui gruppo di  $p$  tangentи, quando  $P'$  descrive la retta  $\tau$ , genera un'involtuzione,  $J_p'$ , di grado  $p$  e prima specie, senza raggi base, un gruppo della quale (quello relativo al luogo  $\Phi_B$ ) è costituito dal raggio  $\tau$  contato  $p$  volte (n° 45, β).

Val quanto dire, che nel caso attuale la rete  $[\Phi]$ , relativa al fascio dato  $[C]$ : 1° ha in  $B$  un punto base  $(\rho - 1)$ -plo a tangentie fisse e coincidenti tutte nella retta  $\tau$ ; 2° contiene un fascio,  $(\Phi_p)$ , che ha in  $B$  un punto base  $(\rho)$ -plo, i cui gruppi di tangentie alle singole curve generano un'involuzione  $J_\rho^i$ , senza raggi base, per un gruppo della quale la retta  $\tau$  è raggio  $(\rho)$ -plo.

Dunque (Teor. XXXV, ovvero n° 56, c):

1° La Jacobiana della rete  $[\Phi]$  avrà in  $B$  un punto multiplo del grado

$$(\rho - 1) + 2(\rho - 1) = 3(\rho - 1).$$

2° I  $2(\rho - 1) - (\rho - 1) = \rho - 1$  raggi doppi (diversi da  $\tau$ ) dell'involuzione  $J_\rho^i$  saranno tangentie in  $B$  alla Jacobiana della rete  $[\Phi]$ .

3° Nella retta  $\tau$ , considerata come quella in cui si confondono tutte le  $\rho - 1$  tangentie fisse in  $B$  alla curva generica della rete  $[\Phi]$ , verranno a coincidere  $\rho - 1$  tangentie in  $B$  alla Jacobiana della rete medesima; e nella retta  $\tau$ , considerata come raggio  $(\rho)$ -plo di un gruppo dell'involuzione  $J_\rho^i$ , verranno altresì a coincidere  $\rho - 1$  tangentie in  $B$  alla detta Jacobiana. Talchè, delle  $3(\rho - 1)$  tangentie in  $B$  alla Jacobiana della rete  $[\Phi]$  ve ne saranno

$$(\rho - 1) + (\rho - 1) = 2(\rho - 1),$$

le quali coincidono nella retta  $\tau$ .

Si ha quindi la proposizione:

**TEOREMA XLIX.** — *Se un fascio contiene una curva dotata d'un punto  $(\rho)$ -plo  $B$ , con tutte le tangentie coincidenti in una medesima retta  $\tau$ , la relativa curva  $\Sigma$  (Teor. XLVI) ha in  $B$ , in generale, un punto  $3(\rho - 1)$ -plo, le cui tangentie sono: 1° la retta  $\tau$  contata  $2(\rho - 1)$  volte; 2° i  $\rho - 1$  raggi doppi (diversi da  $\tau$ ) dell'involuzione di grado  $\rho$  e prima specie costituita dai gruppi di tangentie in  $B$  alle curve  $\Phi$  corrispondenti ai punti della retta  $\tau$  (n° 45, β).*

66. Suppongasi che il fascio dato  $(C)$  possegga un punto base  $B$  di grado  $r (> 0)$ , i cui gruppi di  $r$  tangentie alle singole curve costituiscono un'involuzione di raggi,  $J_r^i$ , di grado  $r$  e prima specie [Caso b) del n° 40].

Come si comporterà nel punto  $B$  il luogo  $\Sigma$  relativo al fascio ( $C$ )?

Indichiamo brevemente con  $\Delta_{2(r-1)}$  il gruppo dei  $2(r-1)$  raggi doppi dell'involuzione  $J_r^1$  e con  $\Delta_{2r+1}$  il gruppo delle  $2r+1$  rette uscenti da  $B$ , ciascuna delle quali ha  $r+2$  intersezioni riunite in  $B$  con una curva del fascio ( $C$ ) (Teor. XXXVIII). La curva  $\Phi_p$ , corrispondente ad un punto arbitrario  $P$  del piano, passa con  $2r-1$  rami pel punto  $B$  ed ha ivi per tangentи la retta  $PB$  e le  $2(r-1)$  rette fisse  $\Delta_{2(r-1)}$  (Teor. XL). In particolare, la curva  $\Phi_B$ , corrispondente al punto  $B$ , passa con  $2r+1$  rami pel punto  $B$  ed ha ivi per tangentи le  $2r+1$  rette  $\Delta_{2r+1}$  (Teor. XXXVIII).

Ne segue che, nel caso attuale, la rete  $[\Phi]$ , relativa al fascio dato ( $C$ ): 1° ha in  $B$  un punto base  $(2r-1)$ -plo, i cui gruppi di tangentи alle singole curve costituiscono un'involuzione  $J_{2r-1}^1$ , di grado  $2r-1$  e prima specie, con  $2(r-1)$  raggi base semplici  $\Delta_{2(r-1)}$ ; 2° contiene una curva,  $\Phi_B$ , la quale passa per  $B$  con  $2r+1$  rami ivi tangentи alle rette  $\Delta_{2r+1}$ .

Dunque (Teor. XXXIV, ovvero n° 56, b):

1° La Jacobiana della rete  $[\Phi]$  avrà in  $B$  un punto multiplo del grado

$$2[(2r-1)-1] + (2r+1) = 3(2r-1).$$

2° In ciascuna delle  $2(r-1)$  rette  $\Delta_{2(r-1)}$  coincideranno due tangentи in  $B$  alla Jacobiana della rete  $[\Phi]$ .

3° Le residuali

$$3(2r-1) - 2 \cdot 2(r-1) = 2r+1$$

tangentи in  $B$  a detta Jacobiana saranno le rette  $\Delta_{2r+1}$ .

Si ha quindi la proposizione:

**TEOREMA L.** — *Se un fascio possiede un punto base ( $r$ )-plo  $B$ , i cui gruppi di tangentи alle singole curve costituiscono un'involuzione,  $J_r^1$ , di grado  $r$  e prima specie, la relativa curva  $\Sigma$  (Teor. XLVI) passa in generale pel punto  $B$  con  $3(2r-1)$  rami, ed ha ivi per tangentи i  $2(r-1)$  raggi doppi di  $J_r^1$ , ciascuno contato due volte, e le  $2r+1$  rette, ciascuna delle quali ha  $r+2$  intersezioni riunite in  $B$  con una curva del fascio (Teor. XXXVIII).*

67. Dal Teor. L per  $r = 1$  e dal Teor. XLVII per  $r = 0$ ,  $\rho = 2$  si ricava in particolare che :

La curva  $\Sigma$  (Teor. XLVI) relativa ad un fascio *generale* d'ordine  $n$ : 1° passa con tre rami per ciascuno degli  $n^2$  punti base semplici del fascio, ed ha ivi per tangentи quelle tre rette, ciascuna delle quali è in quel punto tangente stazionaria per una curva del fascio (Teor. XXXVIII per  $r = 1$ ); 2° passa con due rami per ciascuno dei  $3(n - 1)^2$  punti doppi del fascio (n° 47), in uno qualunque dei quali ha le stesse tangentи di quella curva del fascio, per la quale quel punto è doppio (\*).

68. Rammentando poi che la curva  $\Sigma$  è anche il luogo dei punti di contatto delle tangentи che si possono condurre da un punto arbitrario  $P$  del piano alla corrispondente curva  $\Phi_P$  (Teor. XLVI, γ), si può immediatamente determinare la classe della curva generica della rete  $[\Phi]$ , relativa ad un fascio generale ( $C$ ) d'ordine  $n$ , senza invocare le formole di Plücker. Infatti, cercando le rette che si possono condurre da un punto  $P$  (generico) a toccare altrove la corrispondente curva  $\Phi_P$ , troviamo subito che esse sono : 1° le congiungenti il punto  $P$  agli  $n^2$  punti base del fascio ( $C$ ) (n° 44); 2° le congiungenti il punto  $P$  ai

$$(6n - 6)(2n - 1) - 3n^2 - 2 \cdot 3(n - 1)^2 = 3n(n - 2)$$

punti in cui la curva  $\Phi_P$  è incontrata dal luogo  $\Sigma$ , oltre i punti base ed i punti doppi del fascio ( $C$ ) (n° 67). Ora, siccome la curva  $\Phi_P$  passa pel punto  $P$  (n° 39; n° 41, α), per il che la relativa tangente (come è noto) conta per due, così il numero delle tangentи (distinte e coincidenti) che si possono condurre da  $P$  alla corrispondente curva  $\Phi_P$  è dato dalla formola :

$$n^2 + 3n(n - 2) + 2 = 2(2n - 1)(n - 1).$$

Epperò : La curva generica della rete  $[\Phi]$ , relativa ad un fascio generale d'ordine  $n$ , è della classe  $2(2n - 1)(n - 1)$ .

(\*) Cfr. Doeblemann, loco citato, pp. 553-554.

## § XI.

*Formole di Plücker. — Proprietà diverse.*

69. Fra le più elementari applicazioni della teoria delle « curve  $\Phi$  », (§§ VII-X) è da comprendere la dimostrazione delle note formole di Plücker, che qui esponiamo unicamente per mettere viemmeglio in luce l'efficacia del metodo da noi proposto per trattare le principali questioni della teoria generale delle curve algebriche piane.

Sia  $C$  una curva algebrica generale dell'ordine  $n$ .

Si assumano ad arbitrio nel piano: un punto  $P$  ed una curva ausiliare,  $C^*$ , dello stesso ordine  $n$ . Il luogo  $\Phi_P$ , relativo al fascio  $(C, C^*)$ , è una curva dell'ordine  $2n - 1$ , la quale passa con un ramo per ciascuno degli  $n^2$  punti comuni alle curve  $C$  e  $C^*$  (n<sup>i</sup> 39, 44): Epperò il luogo medesimo incontrerà ulteriormente la curva  $C$  in

$$(2n - 1)n - n^2 = n(n - 1)$$

punti, ciascuno dei quali è punto di contatto di una tangente condotta da  $P$  alla curva data  $C$ . Donde il noto teorema:

« Una curva dell'ordine  $n$  è, in generale, della classe  $n(n - 1)$  ».

70. Suppongasi che la curva data  $C$  possegga un punto ( $r$ -plo,  $O$ , con  $s \leq r$ ) tangentì le quali coincidono tutte in una medesima retta  $\tau$ .

Si assumano ad arbitrio nel piano: un punto  $P$  ed una curva ausiliare  $C^*$ , dell'ordine  $n$ , non passante per  $O$ . Il luogo  $\Phi_P$ , relativo al fascio  $(C, C^*)$ , è una curva dell'ordine  $2n - 1$ , la quale: passa semplicemente per ciascuno degli  $n^2$  punti comuni alle curve  $C$  e  $C^*$ , ed ha in  $O$  un punto  $(r - 1)$ -plo con  $s - 1$  tangentì le quali coincidono tutte nella retta  $\tau$  (n<sup>i</sup> 39, 44, 43). Ora, le ulteriori

$$\begin{aligned} (2n - 1)n - n^2 - [r(r - 1) + (s - 1)] \\ = n(n - 1) - [r(r - 1) + (s - 1)] \end{aligned}$$

intersezioni del luogo  $\Phi_P$  con la curva  $C$  sono i punti di contatto

delle tangenti che si possono condurre dal punto  $P$  alla curva data  $C$  (\*). Dunque (n° 69) :

• Se una curva ha un punto ( $r$ )-plo con  $s (\leq r)$  tangenti coincidenti in una medesima retta, la classe della curva diminuisce, in generale, di

$$n(n-1) - [n(n-1) - r(r-1) - (s-1)] = r(r-1) + (s-1)$$

• unità » (\*\*).

•) Per  $r=2$ ,  $s=1$  : « Un punto doppio ordinario diminuisce di due unità la classe della curva ».

β) Per  $r=2$ ,  $s=2$  : « Una cuspide ordinaria diminuisce di tre unità la classe della curva » (\*\*\*) .

71. Nelle ipotesi del n° precedente si assuma di nuovo nel piano una curva ausiliare  $C^*$ , dell'ordine  $n$ , non passante pel punto  $O$ . Il luogo  $\Phi_O$ , relativo al fascio  $(C, C^*)$ , è una curva dell'ordine  $2n-1$ , la quale: passa semplicemente per ciascuno degli  $n^2$  punti comuni alle curve  $C$  e  $C^*$ , ed ha in  $O$  un punto ( $r$ )-plo con le stesse tangenti della curva  $C$  (n° 39, 44, 41). Onde il luogo mede-

(\*) Per determinare il numero  $n(n-1) - r(r-1) - (s-1)$  delle tangenti che si possono condurre da un punto arbitrario  $P$  del piano ad una curva  $C$  dotata d'un punto ( $r$ )-plo,  $O$ , con  $s (\leq r)$  tangenti coincidenti in una retta  $\tau$ , si può anche assumere, come curva ausiliare  $C^*$ , ad es. una curva d'ordine  $n$  con un punto ( $r^*$ )-plo in  $O$ . In questo caso il luogo  $\Phi_P$ , relativo al fascio  $(C, C^*)$ , passa semplicemente per ciascuno dei residuali  $n^2 - rr^*$  punti comuni alle curve  $C$  e  $C^*$  (n° 44) ed ha in  $O$  un punto  $(r+r^*-1)$ -plo con  $s-1$  tangenti coincidenti nella retta  $\tau$  (Teor. XXXIX, α). Epperò il luogo medesimo, che è dell'ordine  $2n-1$ , incontra ulteriormente la curva  $C$  in

$$(2n-1)n - (n^2 - rr^*) - r(r+r^*-1) - (s-1) \\ = n(n-1) - r(r-1) - (s-1)$$

punti, ciascuno dei quali è punto di contatto di una tangente condotta da  $P$  alla curva data  $C$ . •

(\*\*) Cremona, *Introduz.*, n° 74, b.

(\*\*\*) Conseguentemente: « Un punto ( $r$ )-plo con  $s (\leq r)$  tangenti coincidenti in una medesima retta produce, rispetto alla classe della curva, la stessa diminuzione che produrrebbero  $\frac{1}{2}r(r-1) - (s-1)$  punti doppi ed  $s-1$  cuspidi ordinari ». (Cremona, *Introduz.*, n° 74, d).

simo incontrerà ulteriormente la curva  $C$  in

$$(2n - 1)n - n^2 - (r^2 + r) = n(n - 1) - r(r + 1)$$

punti, in ciascuno dei quali una retta condotta da  $O$  è tangente alla curva data  $C$ . Dunque :

« Se una curva ha un punto ( $r$ )-plo  $O$  (a tangentи distinte o coincidenti), fra le rette uscenti dal punto  $O$  ve ne sono  $n(n-1)-r(r+1)$ , le quali toccano altrove la curva medesima ».

### 72. Sia $C$ una curva algebrica generale dell'ordine $n$ .

Si assuma ad arbitrio nel piano una curva ausiliare,  $C^*$ , dello stesso ordine  $n$ . Il luogo  $\Sigma$  (Teor. XLVI), relativo al fascio  $(C, C^*)$ , è dell'ordine  $6(n - 1)$  e passa con tre rami per ciascuno degli  $n^2$  punti comuni alle curve  $C$  e  $C^*$  (n° 67). Epperò il luogo medesimo incontrerà ulteriormente la curva  $C$  in

$$6n(n - 1) - 3n^2 = 3n(n - 2)$$

punti, ciascuno dei quali (Teor. XLVI, δ) sarà un flesso per la curva data  $C$ . Dunque :

« Una curva d'ordine  $n$  possiede, in generale,  $3n(n - 2)$  punti di flesso ».

### 73. Suppongasi che la curva data $C$ possegga un punto ( $r$ )-plo, $O$ , a tangentи distinte.

Si assuma nel piano una curva ausiliare,  $C^*$ , dello stesso ordine  $n$ , non passante pel punto  $O$ . Il luogo  $\Sigma$  (Teor. XLVI), relativo al fascio  $(C, C^*)$ , passa con tre rami per ciascuno degli  $n^2$  punti comuni alle curve  $C$  e  $C^*$  (n° 67) e passa pel punto  $O$  con  $3r - 4$  rami,  $r$  dei quali hanno ivi le stesse tangentи della curva  $C$  (Teor. XLVIII). Epperò il luogo  $\Sigma$ , che è dell'ordine  $6(n - 1)$ , incontrerà ulteriormente la curva  $C$  in

$$6n(n - 1) - 3n^2 - r(3r - 4) - r = 3n(n - 2) - 3r(r - 1)$$

punti, ciascuno dei quali (Teor. XLVI, δ) sarà un flesso per la curva data  $C$ . Dunque (n° 72) :

« Un punto ( $r$ )-plo a tangentи distinte diminuisce, in generale, di

$$3n(n-2) - [3n(n-2) - 3r(r-1)] = 3r(r-1)$$

« unità il numero dei flessi di una curva » (\*).

a) Per  $r=2$ : « Un punto doppio ordinario diminuisce di sei unità il numero dei flessi della curva ».

74. La curva data  $C$  possegga una cuspide,  $O$ . Sia  $\tau$  la relativa tangente cuspidale.

Si assuma nel piano una curva ausiliare  $C^*$ , dell'ordine  $n$ , non passante pel punto  $O$ . Il luogo  $\Sigma$  (Teor. XLVI), relativo al fascio  $(C, C^*)$ , passa con tre rami per ciascuno degli  $n^2$  punti comuni alle curve  $C$  e  $C^*$  (n° 67) ed ha in  $O$  un punto triplo con due tangentи le quali coincidono nella retta  $\tau$  (Teor. XLIX per  $\rho=2$ ). Onde il luogo  $\Sigma$  incontrerà ulteriormente la curva  $C$  in

$$6n(n-1) - 3n^2 - 2 \cdot 3 - 2 = 3n(n-2) - 8$$

punti, ciascuno dei quali (Teor. XLVI, δ) è un flesso per la curva data  $C$ . Epperò (n° 72):

(\*) Si giunge al medesimo risultato assumendo, come luogo ausiliare  $C^*$ , una curva d'ordine  $n$ , la quale passi pel punto  $O$  con  $r^*$  rami a tangentи distinte e diverse da quelle della curva data  $C$ . Il luogo  $\Sigma$ , relativo al fascio  $(C, C^*)$ , passerà con tre rami per ciascuno dei residuali  $n^2 - rr^*$  punti comuni alle curve  $C$  e  $C^*$  (n° 67):

a) Se  $r^* > r$  ovvero  $r^* < r$ , in ambidue i casi la curva  $\Sigma$  passerà inoltre pel punto  $O$  con  $3(r+r^*) - 4$  rami,  $r$  dei quali avranno ivi le stesse tangentи della curva  $C$  (Teor. XLVII); epperò in ambidue i casi il luogo medesimo incontra ulteriormente la curva  $C$  in

$$\begin{aligned} 6n(n-1) - 3(n^2 - rr^*) - r[3(r+r^*) - 4] \\ - r = 3n(n-2) - 3r(r-1) \end{aligned}$$

punti, ciascuno dei quali è un flesso per la curva data  $C$ .

b) Se  $r=r^*$ , in tal caso la curva  $\Sigma$  passerà con  $3(2r-1)$  rami pel punto  $O$ , senza toccare ivi la curva  $C$  (Teor. L); epperò si trova parimenti, che il luogo istesso incontra ulteriormente la curva  $C$  in

$$6n(n-1) - 3(n^2 - r^2) - r[3(2r-1)] = 3n(n-2) - 3r(r-1)$$

punti, ciascuno dei quali è un flesso per la curva data  $C$ .

« Una cuspidi ordinari diminuisce di tre unità il numero dei flessi della curva ». (\*)

75. Dalle proposizioni dei n° 69; 70, z, §; 72; 73, a; 74 segue immediatamente che una curva algebrica piana dell'ordine  $n$ , con  $\delta$  punti doppi e  $z$  cuspidi ordinari, è della classe

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3z$$

e possiede

$$s = 3n(n-2) - 6\delta - 8z$$

punti di flesso.

Sono queste, insieme alle loro duali, le note formole di Plücker.

(\*) Se si suppone che la curva data  $C$  ha un punto  $(r)$ -plo  $O$  con  $s (\leq r)$  tangenti coincidenti in una medesima retta, e si assume una curva ausiliare  $C'$  d'ordine  $n$ , non passante per  $O$ , in tal caso un esame più intimo della singolarità superiore che il luogo  $\Sigma$  [relativo al fascio  $(C, C')$ ] possiede nel punto  $O$  farebbe conoscere che, nell'ipotesi  $s < r$  (Teor. XLVIII) le curve  $C$  e  $\Sigma$  hanno

$$r(3r-4) + (3s-2) + (r-s)$$

intersezioni riunite in  $O$ , e nell'ipotesi  $s = r$  (Teor. XLIX) le curve  $C$  e  $\Sigma$  hanno

$$3r(r-1) + 2(r-1)$$

intersezioni riunite in  $O$ . Nel 1º caso il luogo  $\Sigma$  [il quale ha bensì un punto triplo in ciascuno degli  $n^2$  punti comuni alle curve  $C$  e  $C'$  (n° 67)] incontra ulteriormente la curva  $C$  in

$$\begin{aligned} 6n(n-1) - 3n^2 - r(3r-4) - (3s-2) - (r-s) \\ = 3n(n-2) - [3r(r-1) + 2(s-1)] \end{aligned}$$

punti, e nel 2º caso in

$$6n(n-1) - 3n^2 - 3r(r-1) - 2(r-1) = 3n(n-2) - [r(3r-1) - 2]$$

punti. Donde si conclude (n° 72) che: « Un punto  $(r)$ -plo con  $s (\leq r)$  tangenti coincidenti in una medesima retta diminuisce, in generale, di  $3r(r-1) + 2(s-1)$  unità il numero dei flessi della curva ».

Conseguentemente [essendo quest'ultimo numero = 6 per  $r = 2$ ,  $s = 1$  (n° 73, a); ed = 8 per  $r = s = 2$  (n° 74)]:

« Un punto  $(r)$ -plo con  $s (\leq r)$  tangenti coincidenti in una medesima retta produce, rispetto al numero dei flessi della curva, la stessa diminuzione che produrrebbero  $\frac{1}{3}r(r-1) - (s-1)$  punti doppi ed  $s-1$  cuspidi ordinari ».

76. Siano  $C_m$ ,  $C_n$ ,  $C_p$  tre curve d'ordini  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , le quali passino per un medesimo punto,  $O$ , risp. con  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  rami a tangenti distinte e diverse per due qualunque di esse. Si indichino con:

$(a_\alpha)$ ,  $(a_\beta)$ ,  $(a_\gamma)$ , rispettivamente, i gruppi di  $np - \beta\gamma$ ,  $pm - \gamma\alpha$ ,  $mn - \alpha\beta$  punti in cui le curve  $C_n$  e  $C_p$ ,  $C_p$  e  $C_m$ ,  $C_m$  e  $C_n$  s'incontrano oltre il punto  $O$ ;

(c) il gruppo degli

$m(m-1) + n(n-1) + p(p-1) - \alpha(\alpha+1) - \beta(\beta+1) - \gamma(\gamma+1)$  punti di contatto delle rette che si possono condurre da  $O$  a toccare altrove le curve  $C_m$ ,  $C_n$ ,  $C_p$  (n° 69, 71);

$\Delta_\mu$  un gruppo arbitrario di  $l$  rette uscenti dal punto  $O$ .

a) Si consideri il fascio d'ordine  $\mu$  ( $\leq m+n+p$ ):

$$(25) \quad (C_\mu) \equiv (C_m, C_n, C_p, \Delta_{\mu-m-n-p}, \Delta_\mu)$$

individuato dai due luoghi d'ordine  $\mu$ :  $C_m, C_n, C_p, \Delta_{\mu-m-n-p}$  e  $\Delta_\mu$ .

Poichè ogni punto di una retta appartenente al gruppo  $\Delta_{\mu-m-n-p}$  ovvero al gruppo  $\Delta_\mu$  può essere considerato come punto di contatto di una tangente condotta da  $O$  ad una curva del fascio  $(C_\mu)$ , ne segue che il luogo  $\Phi_O$ , relativo al fascio  $(C_\mu)$ , il quale è dell'ordine  $2\mu - 1$  (n° 39), si scinderà nelle  $2\mu - m - n - p$  rette  $\Delta_{\mu-m-n-p}$ ,  $\Delta_\mu$  ed in una curva residuale,  $\Theta_O$ , dell'ordine

$$(2\mu - 1) - (2\mu - m - n - p) = m + n + p - 1.$$

Dai teoremi sulle curve  $\Phi$  si trae subito che il luogo  $\Theta_O$ :

1° Passa con  $\alpha + \beta + \gamma$  rami pel punto  $O$  ed ha ivi le stesse tangenti delle curve  $C_m$ ,  $C_n$ ,  $C_p$  (Teor. XXXVII).

2° Passa con un ramo per ciascun punto dei gruppi  $(a_\alpha)$ ,  $(a_\beta)$ ,  $(a_\gamma)$ , ed in uno qualunque di essi,  $a_\alpha$  [del gruppo  $(a_\alpha)$ , ad es.], ha per tangente il raggio doppio (diverso da  $Oa_\alpha$ ) dell'involtione di secondo grado e prima specie individuata dal raggio  $Oa_\alpha$ , contato due volte, e dalla coppia di raggi costituita dalle due tangenti in  $a_\alpha$  alle curve  $C_n$  e  $C_p$  (n° 43); ossia: la retta che è coniugata armonica di  $Oa_\alpha$  rispetto alle due tangenti in  $a_\alpha$  alle curve  $C_n$  e  $C_p$ .

3° Passa con un ramo per ciascuno dei punti doppi (non con-

tenuti nei luoghi  $C$  e  $\Delta$ ) del fascio  $(C_\alpha)$ , ed in uno qualunque di essi,  $d$ , ha per tangente il raggio doppio (diverso da  $Od$ ) dell'involuzione di secondo grado e prima specie individuata dal raggio  $Od$ , contato due volte, e dalla coppia di raggi costituita dalle due tangenti in  $d$  a quella curva del fascio  $(C_\alpha)$  che ha ivi un punto doppio (n° 43); ossia: la retta che è coniugata armonica di  $Od$  rispetto alle due tangenti in  $d$  a quella curva del fascio  $(C_\alpha)$  che ha ivi un punto doppio.

4° Passa con un ramo per ciascun punto del gruppo  $(\epsilon)$  (n° 39).

Si osservi ora che la curva d'ordine  $m + n + p - 1$ ,  $\Theta_O$ , relativa ad un fascio del tipo (25), è unica, qualunque sia  $\mu$  e per qualsiasi scelta dei due gruppi ausiliari  $\Delta$  di rette uscenti dal punto  $O$ . Infatti, essendo

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma + 1) + 2(np + pm + mn - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta) \\ \quad + m(m-1) + n(n-1) + p(p-1) \\ \quad - \alpha(\alpha+1) - \beta(\beta+1) - \gamma(\gamma+1) > (m+n+p-1)^2, \end{array} \right.$$

se due curve  $\Theta_O$  esistessero, esse avrebbero riunite nei punti  $O$ ,  $(a_\alpha)$ ,  $(a_\beta)$ ,  $(a_\gamma)$  e  $(\epsilon)$  un numero d'intersezioni maggiore del prodotto degli ordini, il che è assurdo.

b) Si consideri il fascio d'ordine  $\mu$  ( $\geq$  al più grande dei due numeri  $m$  ed  $n + p$ ):

$$(27) \quad (C_\mu^{(m)}) \equiv (C_n, C_p, \Delta_{\mu-n-p}, C_m, \Delta_{\mu-m}),$$

individuato dai due luoghi composti d'ordine  $\mu$ :  $C_n, C_p, \Delta_{\mu-n-p}$  e  $C_m, \Delta_{\mu-m}$ .

Come sopra, il luogo  $\Phi_O$  relativo al fascio  $(C_\mu^{(m)})$  si scinderà nelle  $2\mu - m - n - p$  rette  $\Delta_{\mu-n-p}$ ,  $\Delta_{\mu-m}$  ed in una curva residuale,  $\Theta_O^{(m)}$ , dell'ordine  $m + n + p - 1$ .

In virtù di proposizioni relative alle curve  $\Phi$ , il luogo  $\Theta_O^{(m)}$ :

1° Se  $\beta + \gamma - \alpha \neq n + p - m$ : passa con  $\alpha + \beta + \gamma$  rami pel punto  $O$  ed ha ivi le stesse tangenti delle curve  $C_n$ ,  $C_p$ ,  $C_m$  (Teor. XXXVII); e se  $\beta + \gamma - \alpha = n + p - m$ : passa pel punto

$O$  con  $\alpha + \beta + \gamma + 1$  rami, le cui tangenti in  $O$  sono tutte diverse, in generale, da quelle delle curve  $C_m$ ,  $C_n$ ,  $C_p$  (Teor. XXXVIII).

2° Passa con un ramo per ciascun punto del gruppo  $(a_\alpha)$ , ed in uno qualunque di essi,  $a_\alpha$ , ha per tangente [vedi più sopra: a), 2°] la retta coniugata armonica di  $Oa_\alpha$  rispetto alle due tangenti in  $a_\alpha$  alle curve  $C_m$  e  $C_p$ .

3° Passa con un ramo per ciascun punto dei gruppi  $(a_\beta)$  ed  $(a_\gamma)$ , in uno qualunque dei quali ha per tangente la retta che congiunge il punto medesimo al punto  $O$  (n° 44).

4° Passa con un ramo per ciascuno dei punti doppi (non contenuti nei luoghi  $C$  e  $\Delta$ ) del fascio  $(C_\mu^{(m)})$ , ed in uno qualunque di essi,  $d$ , ha per tangente [vedi più sopra: a), 3°] la retta coniugata armonica di  $Od$  rispetto alle due tangenti in  $d$  a quella curva del fascio  $(C_\mu^{(m)})$  che ha ivi un punto doppio.

5° Passa con un ramo per ciascun punto del gruppo  $(c)$  (n° 39).

Anche qui si osservi che la curva d'ordine  $m + n + p - 1$   $\Theta_O^{(m)}$ , relativa ad un fascio del tipo (27), è unica, qualunque sia  $\mu$  e per qualsiasi scelta dei due gruppi ausiliari  $\Delta$  di rette uscenti dal punto  $O$ . Infatti, in virtù dell'ineguaglianza (26) (pel caso generale  $\beta + \gamma - \alpha \neq n + p - m$ ) e della seguente:

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta + \gamma + 1)^2 + 2(np + pm + mn - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta) \\ & + m(m - 1) + n(n - 1) + p(p - 1) \\ & - \alpha(\alpha + 1) - \beta(\beta + 1) - \gamma(\gamma + 1) > (m + n + p - 1)^2 \end{aligned}$$

(pel caso particolare  $\beta + \gamma - \alpha = n + p - m$ ), se due curve  $\Theta_O^{(m)}$  esistessero, esse avrebbero riunite nei punti  $O$ ,  $(a_\alpha)$ ,  $(a_\beta)$ ,  $(a_\gamma)$  e  $(c)$  un numero d'intersezioni maggiore del prodotto degli ordini, il che è assurdo.

Pertanto, indicando con  $\Theta_O^{(n)}$  e  $\Theta_O^{(p)}$  i luoghi analoghi a  $\Theta_O^{(m)}$ , che si ottengono scambiando fra loro in (27) risp. le curve  $C_m$  e  $C_n$  e le curve  $C_m$  e  $C_p$ , da quanto precede si conclude che per tutti i punti di contatto,  $(c)$ , delle rette che si possono condurre da  $O$  a toccare altrove le tre curve  $C_m$ ,  $C_n$ ,  $C_p$  passano quattro curve d'ordine  $m + n + p - 1$ :  $\Theta_O$ ,  $\Theta_O^{(m)}$ ,  $\Theta_O^{(n)}$ ,  $\Theta_O^{(p)}$ , tali che:

1° Ciascuna di esse passa altresì :

con  $\alpha + \beta + \gamma$  rami pel punto  $O$  ed ha ivi le stesse tangenti delle curve date  $C_m$ ,  $C_n$ ,  $C_p$ ;

con un ramo per ogni punto dei gruppi  $(a_\alpha)$ ,  $(a_\beta)$ ,  $(a_\gamma)$ .

2° In un punto qualunque,  $a_\alpha$ , del gruppo  $(a_\alpha)$  (ad es.) :

ciascuna delle due curve  $\Theta_O^{(n)}$ ,  $\Theta_O^{(p)}$  ha per tangente la retta  $Oa_\alpha$ ;

ciascuna delle due curve  $\Theta_O$ ,  $\Theta_O^{(m)}$  ha per tangente la retta coniugata armonica di  $Oa_\alpha$  rispetto alle due tangenti in  $a_\alpha$  alle curve  $C_n$  e  $C_p$ .

In particolare : se  $\beta + \gamma - \alpha = n + p - m$ , la curva  $\Theta_O^{(m)}$  passa pel punto  $O$  con  $\alpha + \beta + \gamma + 1$  rami, le cui tangenti in  $O$  sono tutte diverse, in generale, da quelle delle curve  $C_m$ ,  $C_n$ ,  $C_p$ ; ed analogamente pei luoghi  $\Theta_O^{(n)}$  e  $\Theta_O^{(p)}$ .

c) Le quattro curve d'ordine  $m + n + p - 1$ :  $\Theta_O$ ,  $\Theta_O^{(n)}$ ,  $\Theta_O^{(p)}$ ,  $\Theta_O^{(m)}$  godono della proprietà di appartenere ad una medesima rete. Per dimostrare ciò procederemo nel modo seguente.

Pongasi anzitutto  $n = p$  e  $\gamma = p$ ; per il che si viene a supporre, nella ricerca precedente, che i luoghi  $C_n$  e  $C_p$  siano, rispettivamente,  $n$  e  $p$  rette uscenti dal punto  $O$ . In tal caso, i quattro luoghi  $\Theta_O$ ,  $\Theta_O^{(n)}$ ,  $\Theta_O^{(p)}$ ,  $\Theta_O^{(m)}$  si riducono ad un solo, costituito da quelle  $n + p$  rette e da un luogo residuale, dell'ordine  $m - 1$ , che è la *prima polare* di  $O$  rispetto a  $C_m$  (\*), e si ha in particolare la nota proposizione :

« Data nel piano una curva  $C_m$ , d'ordine  $m$ , con un punto  $(\alpha)$ -plo  $O$  ( $\alpha \geq 0$ ), gli  $m(m - 1) - \alpha(\alpha + 1)$  punti di contatto delle rette che si possono condurre da  $O$  a toccare altrove la curva  $C_m$  sono situati in una curva d'ordine  $m - 1$  (la prima polare di  $O$  rispetto a  $C_m$ ), la quale passa con  $\alpha$  rami pel punto  $O$  ed ha ivi le stesse tangenti della curva  $C_m$  » (\*\*).

Indichiamo con  $C_{m-1}$  quest'ultima curva d'ordine  $m - 1$  e torniamo alle curve  $C_m$ ,  $C_n$ ,  $C_p$ .

(\*) Cfr. la mia Nota: *Una definizione sintetica delle curve polari* (questi Rendiconti, t. VII, 1893, pp. 263-272), n° 5.

(\*\*) Cfr. Cremona, *Introduz.*, ni 70-72.

I luoghi  $\Theta_0^{(n)}$  e  $\Theta_0^{(p)}$  individuano un fascio  $(\Theta_0^{(n)}, \Theta_0^{(p)})$ , d'ordine  $m + n + p - 1$ , il quale [vedi più sopra, b)] avrà:

in  $O$ : un punto base  $(\alpha + \beta + \gamma)$ -plo a tangenti fisse (le tangenti in  $O$  alle curve  $C_n$ ,  $C_n$ ,  $C_p$ );

in un punto qualunque dei gruppi  $(c)$ ,  $(a_\beta)$  ed  $(a_\gamma)$ : un punto base semplice a tangente mobile;

in un punto qualunque,  $a_\alpha$ , del gruppo  $(a_\alpha)$ : un punto base semplice a tangente fissa (la retta  $Oa_\alpha$ ).

Dall'ultima di queste proprietà segue (Teor. V, nota) che il fascio  $(\Theta_0^{(n)}, \Theta_0^{(p)})$  conterrà una curva, la quale passerà con due rami per il punto  $a_\alpha$ . Ora questa, dovendo incontrare ciascuna delle curve  $C_n$  e  $C_p$  in un numero di punti che risulta maggiore del prodotto degli ordini (\*), si scinde evidentemente nelle curve  $C_n$  e  $C_p$ , ed in un luogo residuale dell'ordine  $(m + n + p - 1) - n - p = m - 1$ , il quale, dovendo avere in  $O$  un punto  $(\alpha)$ -plo con le stesse tangenti della curva  $C_m$  e dovendo inoltre passare con un ramo per ciascuno degli  $m(m - 1) - \alpha(\alpha + 1)$  punti di contatto delle rette che si possono condurre da  $O$  a toccare altrove la curva  $C_m$ , coinciderà necessariamente con la curva  $C_{m-1}$  dianzi considerata. Dunque: una delle curve del fascio  $(\Theta_0^{(n)}, \Theta_0^{(p)})$  è il luogo composto  $C_n \cdot C_p \cdot C_{m-1}$ .

Analogamente, il fascio  $(\Theta_0, \Theta_0^{(n)})$ , individuato dai luoghi  $\Theta_0$  e  $\Theta_0^{(n)}$ , avrà [vedi più sopra: a) e b)]:

in  $O$ : un punto base  $(\alpha + \beta + \gamma)$ -plo a tangenti fisse (le tangenti in  $O$  alle curve  $C_n$ ,  $C_n$ ,  $C_p$ );

in un punto qualunque dei gruppi  $(c)$ ,  $(a_\beta)$  ed  $(a_\gamma)$ : un punto base semplice a tangente mobile;

in un punto qualunque,  $a_\alpha$ , del gruppo  $(a_\alpha)$ : un punto base semplice a tangente fissa (la retta coniugata armonica di  $Oa_\alpha$  rispetto alle due tangenti in  $a_\alpha$  alle curve  $C_n$  e  $C_p$ ).

(\*) Rispettivamente per le inegualianze:

$$\begin{aligned} \beta(\alpha + \beta + \gamma) + \beta + [n(n - 1) - \beta(\beta + 1)] + (mn - \alpha\beta) + (np - \beta\gamma - 1) + 2 \\ > n(m + n + p - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma + [p(p - 1) - \gamma(\gamma + 1)] + (pm - \gamma\alpha) + (np - \beta\gamma - 1) + 2 \\ > p(m + n + p - 1). \end{aligned}$$

Come sopra, il fascio  $(\Theta_O, \Theta_O^{(m)})$  conterrà una curva dotata di un punto doppio in  $a_2$ , la quale si scinde nelle curve  $C_n, C_p$  ed in un luogo residuale d'ordine  $m - 1$ ; e quest'ultimo, dovendo avere in  $O$  un punto  $(\alpha)$ -plo con le stesse tangenti della curva  $C_m$  e dovendo inoltre passare con un ramo per ciascuno degli  $m(m - 1) - \alpha(\alpha + 1)$  punti di contatto delle rette che si possono condurre da  $O$  a toccare altrove la curva  $C_m$ , coinciderà necessariamente con la curva  $C'_{m-1}$ . Epperò: il luogo composto  $C_n.C_p.C'_{m-1}$  è anche contenuto nel fascio  $(\Theta_O, \Theta_O^{(m)})$ .

Ora, poichè i due fasci  $(\Theta_O^{(n)}, \Theta_O^{(p)})$  e  $(\Theta_O, \Theta_O^{(m)})$  hanno in comune una curva,  $C_n.C_p.C'_{m-1}$ , se ne conclude che i quattro luoghi:  $\Theta_O, \Theta_O^{(m)}, \Theta_O^{(n)}, \Theta_O^{(p)}$  appartengono ad una medesima rete. C. D. D.

Dalla discussione precedente discendono le seguenti proposizioni:

**TEOREMA LI.** — *Date nel piano tre curve  $C_m, C_n, C_p$ , d'ordini  $m, n, p$ , le quali passano per un medesimo punto,  $O$ , risp. con  $\alpha (\geq 0), \beta (\geq 0), \gamma (\geq 0)$  rami a tangenti distinte e diverse per due qualunque di esse, esiste una rete di curve,  $[\Theta]$ , dell'ordine  $m + n + p - 1$ , la curva generica della quale passa:*

*con  $\alpha + \beta + \gamma$  rami pel punto  $O$  ed ha ivi le stesse tangenti delle curve  $C_m, C_n, C_p$ ;*

*con un ramo, a tangente mobile, per ciascuno degli ulteriori*

$$np + pm + mn - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta$$

*punti d'incontro delle curve  $C_m, C_n, C_p$ , due a due;*  
*con un ramo, a tangente mobile, per ciascuno degli*

$$m(m - 1) + n(n - 1) + p(p - 1) - \alpha(\alpha + 1) - \beta(\beta + 1) - \gamma(\gamma + 1)$$

*punti di contatto delle rette che si possono condurre da  $O$  a toccare altrove le curve  $C_m, C_n, C_p$ .*

*La rete  $[\Theta]$  contiene quattro curve:  $\Theta_O, \Theta_O^{(m)}, \Theta_O^{(n)}, \Theta_O^{(p)}$ , tali che:*

*1° In uno qualsiasi,  $a_{ij}$ , degli ulteriori punti comuni alle curve  $C_i$  e  $C_j$  ( $i, j = m, n, p$ ):*

*a) ciascuna delle due curve  $\Theta_O^{(i)}, \Theta_O^{(j)}$  ha per tangente la retta  $Oa_{ij}$ ;*

1° *Si consideri* della curva  $C_i$ ,  $\alpha^k$  *la retta tangente al punto*  $x$  *e le*  $m-n$  *curve*  $C_{i-1}$  *che, assieme alla curva tangente in*  $x$ , *dànno*  $C_i$  *e*  $C_j$ .

2° *Il fascio*  $(\alpha^k, \alpha^{k+1}, \dots, \alpha^{m-n})$  *è la retta tangente di lungo d'ordine*  $m-n-k-1$  *all'intorno della curva*  $C_i$ . *C è il luogo polare di*  $O$  *rifatto a*  $C_i$ ; *il fascio*  $(\alpha^k, \alpha^{k+1}, \dots, \alpha^{m-n})$  *è luogo di lungo d'ordine*  $m-n-k-1$  *all'intorno della curva*  $C_i$ .  $C_i$  *e* *luogo polare di*  $O$  *rifatto a*  $C_i$ .

*In particolare:*  $m-k-n-z = n - z - m$ . *Le curve*  $\alpha^k$  *passano per il punto*  $O$  *con*  $z-k-n-z$  *come*. *Le rette tangenti in*  $O$  *sono tutte diverse, in generale, da quelle delle curve*  $C_i, C_j, C_k$ ; *si dimostrerà* *per gli altri* *che lunghe*  $\alpha^k$  *e*  $\alpha^{k+1}$ .

**Teorema III.** — *Dati* *sei punti* *su* *tre curve*  $C_m, C_n, C_p$ , *l'ordine*  $m, n, p$ , *le quali passano per un medesimo punto*  $O$ , *rif. con*  $z (\geq 0), \xi (\geq 0), \tau \geq 0$ , *essi e i luoghi fissi si ottengono per due qualunque di esse, se si ricava al simbolo*  $\Delta$  *un secondo criterio di* *le rette ascritte dal punto*  $O$ :

1° *I punti doppi* (*non contenuti nei luoghi*  $C$  *e*  $\Delta$ ) *di ogni fascio d'ordine qualunque*  $\mu (\geq m-n-z)$ :

$$(C_p) \equiv (C_m, C_n, C_p, \Delta_{m-n-z}, \Delta_p)$$

*sono situati nella curva d'ordine*  $m+n-p-1$ :  $\Theta_0$ , *definita nel Teor. LI.*

2° *I punti doppi* (*non contenuti nei luoghi*  $C$  *e*  $\Delta$ ) *di ogni fascio d'ordine qualunque*  $\mu (\geq$  *al più grande dei due numeri*  $m$  *ed*  $n+p$ ):

$$(C_p^{(n)}) \equiv (C_m, C_p, \Delta_{p-m}, C_n, \Delta_{p-n})$$

(\*) Indicando con  $c_i$  uno qualunque dei punti di contatto delle rette che si possono condurre da  $O$  a toccare altrove la curva  $C_i$  e con  $C'_{j-1}, C'_{k-1}$  le prime polari di  $O$  rispetto alle curve  $C_i, C_k$  ( $i, j, k = m, n, p$ ), si potrebbe aggiungere che la curva unica, della rete  $[\Theta]$ , dotata d'un punto doppio in  $c_i$  [Teor. IV, nota, Esempio d)] è il luogo composto dalla curva  $C_i$  insieme a quella curva del fascio  $(C_j, C'_{k-1}, C_k, C'_{j-1})$  che passa per  $c_i$ .

sono situati nella curva d'ordine  $m + n + p - 1$ :  $\Theta_O^{(m)}$ , definita nel Teor. LI: ed analogamente per gli altri due fasci  $(C_\mu^{(n)})$  e  $(C_\mu^{(p)})$ .

3° Se  $d$  è un punto doppio (non situato nei luoghi  $C$  e  $\Delta$  di un fascio  $(C_\mu)$  [ovvero di un fascio  $(C_\mu^{(i)})$  ( $i = m, n, p$ )], la tangente in  $d$  alla curva  $\Theta_O$  [ovvero  $\Theta_O^{(i)}$ ] sarà la retta coniugata armonica del raggio  $Od$  rispetto alle due tangenti in  $d$  a quella curva del fascio che ha ivi un punto doppio.

Queste due proposizioni (le quali sono suscettibili di immediata estensibilità ad un numero qualsivoglia di curve  $C$ ) comprendono anche il caso particolare  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , per il quale negli enunciati s'intenderà che  $O$  sia un punto del piano fissato ad arbitrio.

77. Nelle ipotesi del n° precedente suppongasi che le curve  $C_m, C_n, C_p$  passino per un altro punto,  $O'$ , risp. con  $\alpha' (\geq 0)$ ,  $\beta' (\geq 0)$ ,  $\gamma' (\geq 0)$  rami a tangentie distinte e diverse per due qualsiasi di esse. In questo caso, il numero di punti di ciascun gruppo  $(a_\alpha), (a_\beta), (a_\gamma), (c)$  sarà diminuito, rispettivamente, di  $\beta'\gamma', \gamma'\alpha', \alpha'\beta', \alpha'(\alpha' - 1) + \beta'(\beta' - 1) + \gamma'(\gamma' - 1)$  (n° 70) unità. Inoltre:

1° La curva  $\Theta_O$  del Teor. LI passerà con  $\alpha' + \beta' + \gamma' - 1$  rami pel punto  $O'$  ed avrà ivi per tangentie gli  $\alpha' + \beta' + \gamma' - 1$  raggi doppi (diversi da  $OO'$ ) dell'involuzione di grado  $\alpha' + \beta' + \gamma'$  e prima specie individuata dal raggio  $OO'$  contato  $\alpha' + \beta' + \gamma'$  volte e dal gruppo costituito dalle tangentie in  $O'$  alle curve  $C_m, C_n, C_p$  (n° 43); ossia (\*): gli assi armonici, di grado  $\alpha' + \beta' + \gamma' - 1$ , del gruppo costituito dalle  $\alpha' + \beta' + \gamma'$  tangentie in  $O'$  alle curve  $C_m, C_n, C_p$ , rispetto alla retta  $OO'$ .

2° La curva  $\Theta_O^{(m)}$  (ad es.) del Teor. LI passerà pel punto  $O'$  con  $\alpha' + \beta' + \gamma' - 1$  rami. Le sue tangentie in  $O'$  saranno:

a) se  $\alpha' > \beta' + \gamma'$ : gli  $\alpha' + \beta' + \gamma' - 1$  raggi doppi (diversi da  $OO'$ ) dell'involuzione di grado  $\alpha'$  e prima specie individuata dal gruppo delle tangentie in  $O'$  alla curva  $C_m$  e dal gruppo

(\*) Kohn, *Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte* (Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. zu Wien, II. Abth. Juli-Heft, 1883). Cfr. altresì la mia Nota: *Sulle involuzioni di specie qualunque dotate di singolarità ordinarie* (questi Rendiconti, t. VIII, 1894, pp. 227-247), n° 14.

costituito dal raggio  $OO'$ , contato  $\alpha' - \beta' - \gamma'$  volte, insieme alle tangenti in  $O'$  alle curve  $C_n$ , e  $C_p$  (Teor. XXXIX);

b) se  $\alpha' < \beta' + \gamma'$ : gli  $\alpha' + \beta' + \gamma' - 1$  raggi doppi (diversi da  $OO'$ ) dell'involuzione di grado  $\beta' + \gamma'$  e prima specie individuata dal gruppo costituito dal raggio  $OO'$  contato  $\beta' + \gamma' - \alpha'$  volte insieme alle tangenti in  $O'$  alla curva  $C_m$  e dal gruppo costituito dalle tangenti in  $O'$  alle curve  $C_n$  e  $C_p$  (Teor. XXXIX);

c) se  $\alpha' = \beta' + \gamma'$ : la retta  $OO'$  ed i  $2(\alpha' - 1)$  raggi doppi dell'involuzione generale di grado  $\alpha'$  e prima specie individuata dal gruppo di tangenti in  $O'$  alla curva  $C_m$  e dal gruppo costituito dalle tangenti in  $O'$  alle curve  $C_n$  e  $C_p$  (Teor. XL).

78. Nella ricerca del n° 76 pongasi  $\gamma = p$ , con che si viene a supporre che il luogo  $C_p$  si scinda in  $p$  rette uscenti da  $O$ . In questo caso, i quattro luoghi  $\Theta_O$ ,  $\Theta_O^{(m)}$ ,  $\Theta_O^{(n)}$ ,  $\Theta_O^{(p)}$  si riducono a due, ciascuno dei quali risulta costituito da quelle  $p$  rette e da un luogo residuale d'ordine  $m + n - 1$ ; e si ottengono, come casi particolari dei Teoremi LI e LII, le due seguenti proposizioni:

**TEOREMA LIII.** — Date nel piano due curve  $C_m$  e  $C_n$ , d'ordini  $m$  ed  $n$ , le quali passano per un medesimo punto,  $O$ , risp. con  $\alpha (\geq 0)$  e  $\beta (\geq 0)$  rami a tangenti distinte e diverse, esiste un fascio di curve  $(\Theta)$ , dell'ordine  $m + n - 1$ , la curva generica del quale passa:

con  $\alpha + \beta$  rami pel punto  $O$  ed ha ivi le stesse tangenti delle curve  $C_m$  e  $C_n$ ;

con un ramo, a tangente mobile, per ciascuno degli ulteriori  $m + n - \alpha - \beta$  punti d'incontro delle curve  $C_m$  e  $C_n$ ;

con un ramo, a tangente mobile, per ciascuno degli

$$m(m-1) + n(n-1) - \alpha(\alpha+1) - \beta(\beta+1)$$

punti di contatto delle rette che si possono condurre da  $O$  a toccare altrove le curve  $C_m$  e  $C_n$ .

Il fascio  $(\Theta)$  contiene due curve,  $\Theta_O$ ,  $\Theta_O^*$ , tali che, in uno qualsiasi,  $a$ , degli ulteriori punti comuni alle curve  $C_m$  e  $C_n$ : uno dei due luoghi,  $\Theta_O^*$ , ha per tangente la retta  $Oa$  e l'altro;  $\Theta_O$ , ha per tangente la retta coniugata armonica di  $Oa$  rispetto alle due tangenti in  $a$  alle curve  $C_m$  e  $C_n$ .

In particolare: se  $m - \alpha = n - \beta$ , la curva  $\Theta_O^*$  passa per punto  $O$  con  $\alpha + \beta + 1$  rami, le cui tangenti in  $O$  sono tutte diverse, in generale, da quelle delle curve  $C_m$  e  $C_n$ . (\*)

**TEOREMA LIV.** — Date nel piano due curve  $C_m$  e  $C_n$ , d'ordini  $m$  ed  $n$ , le quali passano per un medesimo punto,  $O$ , risp. con  $\alpha (\geq 0)$  e  $\beta (\geq 0)$  rami a tangenti distinte e diverse, se si indica col simbolo  $\Delta$ , un gruppo arbitrario di  $l$  rette uscenti dal punto  $O$ :

1° I punti doppi (non contenuti nei luoghi  $C$  e  $\Delta$ ) di ogni fascio d'ordine qualunque  $\mu (\geq m + n)$ :

$$(C_\mu) \equiv (C_m, C_n, \Delta_{\mu-m-n}, \Delta_\mu)$$

sono situati nella curva d'ordine  $m + n - 1$ :  $\Theta_O$ , definita nel Teorema LIII.

2° I punti doppi (non contenuti nei luoghi  $C$  e  $\Delta$ ) di ogni fascio d'ordine qualunque  $\mu (\geq$  al più grande dei due numeri  $m$  ed  $n$ ):

$$(C_\mu^*) \equiv (C_m, \Delta_{\mu-m}, C_n, \Delta_{\mu-n})$$

sono situati nella curva d'ordine  $m + n - 1$ :  $\Theta_O^*$ , definita nel Teorema LIII.

3° Se  $d$  è un punto doppio (non situato nei luoghi  $C$  e  $\Delta$ ) di un fascio  $(C_\mu)$  [ovvero  $(C_\mu^*)$ ], la tangente in  $d$  alla curva  $\Theta_O$  [ovvero  $\Theta_O^*$ ] sarà la retta coniugata armonica del raggio  $Od$  rispetto alle due tangenti in  $d$  a quella curva del fascio che ha ivi un punto doppio.

Pel caso particolare  $\alpha = \beta = 0$  nei due precedenti enunciati s'intenderà che  $O$  sia un punto fissato ad arbitrio nel piano.

79. Nelle ipotesi precedenti, se si suppone che le curve  $C_m$  e  $C_n$  passino per un altro punto,  $O'$ , risp. con  $\alpha' (\geq 0)$  e  $\beta' (\geq 0)$  rami a tangenti distinte e diverse, in tal caso i gruppi  $(a_r)$  e  $(c)$  (n° 76) conterranno risp.  $m n - \alpha \beta - \alpha' \beta'$  ed  $m(m-1) + n(n-1)$

(\*) Pel luogo  $\Theta_O^*$  cfr. Caporali, *Sulle tangenti condotte ad una curva algebrica piana da un suo punto multiplo* (Rend. Acc. Napoli, giugno 1881), teorema del n° 1.

$-\alpha(\alpha+1) - \beta(\beta+1) - \alpha'(\alpha'-1) - \beta'(\beta'-1)$  (n° 69, 70 e 71) punti, ed inoltre :

1° La curva  $\Theta_O$  del Teor. LIII passerà con  $\alpha' + \beta' - 1$  rami pel punto  $O'$  ed avrà ivi per tangentи gli assi armonici, di grado  $\alpha' + \beta' - 1$ , del gruppo costituito dalle  $\alpha' + \beta'$  tangentи in  $O'$  alle curve  $C_m$  e  $C_n$  rispetto alla retta  $OO'$  (n° 43; n° 77, 1°).

2° La curva  $\Theta_O^*$  del Teor. LIII passerà pel punto  $O'$  con  $\alpha' + \beta' - 1$  rami. Le sue tangentи in  $O'$  saranno :

a) se  $\alpha' > \beta'$ : gli  $\alpha' + \beta' - 1$  raggi doppi (diversi da  $OO'$ ) dell'involuzione di grado  $\alpha'$  e prima specie individuata dal gruppo delle tangentи in  $O'$  alla curva  $C_m$  e dal gruppo costituito dal raggio  $OO'$ , contato  $\alpha' - \beta'$  volte, insieme alle tangentи in  $O'$  alla curva  $C_n$  (Teor. XXXIX);

b) se  $\alpha' < \beta'$ : gli  $\alpha' + \beta' - 1$  raggi doppi (diversi da  $OO'$ ) dell'involuzione di grado  $\beta'$  e prima specie individuata dal gruppo costituito dal raggio  $OO'$ , contato  $\beta' - \alpha'$  volte, insieme alle tangentи in  $O'$  alla curva  $C_m$  e dal gruppo costituito dalle tangentи in  $O'$  alla curva  $C_n$  (Teor. XXXIX);

c) se  $\alpha' = \beta'$ : la retta  $OO'$  ed i  $2(\alpha' - 1)$  raggi doppi dell'involuzione generale di grado  $\alpha'$  e prima specie individuata dai due gruppi di tangentи in  $O'$  alle curve  $C_m$  e  $C_n$  (Teor. XL).

80. Se nei Teoremi LIII e LIV poniamo  $\beta = n$ , per il che si viene a supporre che il luogo  $C_n$  si scinde in  $n$  rette uscenti da  $O$ , in tal caso: i luoghi  $\Theta_O$  e  $\Theta_O^*$  coincideranno in uno, costituito da quelle  $n$  rette e da un luogo residuale d'ordine  $m - 1$ , che è la prima polare di  $O$  rispetto a  $C_m$ ; il Teor. LIII ci ricondurrà ad una proposizione già notata (n° 76, c); ed il Teor. LIV assumerà l'enunciato seguente (nel quale per  $\alpha = 0$  intenderemo che  $O$  sia un punto preso fuori della curva  $C_m$ ):

Data nel piano una curva  $C_m$ , d'ordine  $m$ , dotata d'un punto ( $\alpha$ -plo  $O$  ( $\alpha \leq 0$ )), se si indica col simbolo  $\Delta$ , un gruppo arbitrario di  $l$  rette uscenti da  $O$ : i punti doppi (non contenuti nei luoghi  $C$  e  $\Delta$ ) di ogni fascio d'ordine qualunque  $\mu (\geq m)$ :

$$(C_\mu) \equiv (C_m, \Delta_{\mu=m}, \Delta_\mu)$$

giacciono nella prima polare di  $O$  rispetto alla curva  $C_m$ .

Se  $d$  è un punto doppio (non situato nei luoghi  $C$  e  $\Delta$ ) di un fascio ( $C_\mu$ ), la tangente in  $d$  alla prima polare di  $O$  rispetto a  $C$  sarà la retta coniugata armonica del raggio  $Od$  rispetto alle due tangenti in  $d$  a quella curva del fascio che ha ivi un punto doppio (\*).

81. Dal Teor. LI per  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ :

Date nel piano due curve  $C_m$  e  $C_n$ , degli ordini  $m$  ed  $n$ , le quali passano per un medesimo punto,  $O$ , risp. con  $\alpha (\geq 0)$  e  $\beta (\geq 0)$  rami a tangenti distinte e diverse: per ogni trasversale  $R$  (non passante per  $O$ ) esiste una rete di curve,  $[\Theta]$ , dell'ordine  $m+n$ , la curva generica della quale passa:

con  $\alpha + \beta$  rami per il punto  $O$  ed ha ivi le stesse tangenti delle curve  $C_m$  e  $C_n$ ;

con un ramo, a tangente mobile, per ciascuno degli  $m+n$  punti in cui la retta  $R$  incontra le curve  $C_m$  e  $C_n$ ;

con un ramo, a tangente mobile, per ciascuno degli ulteriori  $mn - \alpha\beta$  punti d'incontro delle curve  $C_m$  e  $C_n$ ;

e con un ramo, a tangente mobile, per ciascuno degli

$$m(m-1) + n(n-1) - \alpha(\alpha+1) - \beta(\beta+1)$$

punti di contatto delle rette che si possono condurre da  $O$  a toccare altrove le curve  $C_m$  e  $C_n$ .

La rete  $[\Theta]$  contiene quattro curve:  $\Theta_O$ ,  $\Theta_O^{(m)}$ ,  $\Theta_O^{(n)}$ ,  $\Theta_O^{(1)}$ , tali che:

1° In uno qualsiasi,  $a$ , degli ulteriori punti comuni alle curve  $C_m$  e  $C_n$ : ciascuna delle due curve  $\Theta_O^{(m)}$ ,  $\Theta_O^{(n)}$  ha per tangente la retta  $Oa$  e ciascuna delle due curve  $\Theta_O$ ,  $\Theta_O^{(1)}$  ha per tangente la retta coniugata armonica di  $Oa$  rispetto alle due tangenti in  $a$  alle curve  $C_m$  e  $C_n$ ; ed in uno qualsiasi,  $a_i$ , degli  $i$  punti d'incontro

(\*) Per questa via si ritrovano tutti i teoremi relativi alle prime polari. Così ad es. (sempre nell'ipotesi  $\beta = n$ ) ponendo  $\beta' = 0$  negli enunciati del n° 79 si ha la nota proposizione: « La prima polare di un punto qualunque,  $O$ , rispetto ad una curva dotata d'un punto  $(\alpha')$ -plo,  $O'$ , passa con  $\alpha' - 1$  rami per  $O'$  ed ha ivi per tangenti le  $\alpha' - 1$  rette il cui sistema è la prima polare di  $O$  rispetto al gruppo delle  $\alpha'$  tangenti in  $O'$  alla curva data ». (Cremona, *Introduz.*, n° 73 e 74). Etc. etc.

della retta  $R$  con la curva  $C_i$  ( $i, j = m, n$ ): ciascuna delle due curve  $\Theta_0^{(i)}$ ,  $\Theta_0^{(j)}$  ha per tangente la retta  $Oa_i$  e ciascuna delle due curve  $\Theta_0$ ,  $\Theta_0^*$  ha per tangente la retta coniugata armonica di  $Oa_i$  rispetto alla coppia di rette costituita dalla retta  $R$  insieme alla tangente in  $a_i$  alla curva  $C_i$ .

2° Ciascuno dei due fasci  $(\Theta_0, \Theta_0^{(i)})$ ,  $(\Theta_0^{(m)}, \Theta_0^{(n)})$  contiene il luogo d'ordine  $m + n$  composto delle curve  $C_m$  e  $C_n$ ; e ciascuno dei due fasci  $(\Theta_0^{(i)}, \Theta_0^{(j)})$ ,  $(\Theta_0^{(i)}, \Theta_0)$  ( $i, j = m, n$ ) contiene il luogo d'ordine  $m + n$  composto della retta  $R$ , della curva  $C_i$  e della prima polare di  $O$  rispetto a  $C_j$ .

In particolare: se  $\beta - \alpha = n - m + 1$  (ovvero  $\beta - \alpha = n - m - 1$ ) la curva  $\Theta_0^{(m)}$  (ovvero la curva  $\Theta_0^{(n)}$ ) passa pel punto  $O$  con  $\alpha + \beta + 1$  rami, le cui tangenti sono tutte diverse, in generale, da quelle delle curve  $C_m$  e  $C_n$ .

82. Dal Teor. LIII per  $n = 1$ ,  $\beta = 0$  (ovvero dal Teor. LI per  $\gamma = p$ ,  $n = 1$ ,  $\beta = 0$ ):

Data nel piano una curva  $C_m$ , d'ordine  $m$ , con un punto  $(\alpha)$ -plo  $O$  ( $\alpha \leq 0$ ) a tangentи distinte: per ogni trasversale  $R$  (non passante per  $O$ ) esiste un fascio di curve,  $(\Theta)$ , d'ordine  $m$ , la curva generica del quale passa:

con  $\alpha$  rami pel punto  $O$  ed ha ivi le stesse tangenti della curva  $C_m$ ;

con un ramo, a tangente mobile, per ciascuno degli  $m$  punti in cui la retta  $R$  incontra la curva  $C_m$ ;

e con un ramo, a tangente mobile, per ciascuno degli  $m(m - 1) - \alpha(\alpha + 1)$  punti di contatto delle rette che si possono condurre da  $O$  a toccare altrove la curva  $C_m$ .

Il fascio  $(\Theta)$  contiene due curve:  $\Theta_0$ ,  $\Theta_0^*$ , tali che, in uno qualsiasi,  $a$ , degli  $m$  punti comuni alla retta  $R$  ed alla curva  $C_m$ : uno dei due luoghi,  $\Theta_0^*$ , ha per tangente la retta  $Oa$  e l'altro,  $\Theta_0$ , ha per tangente la retta coniugata armonica di  $Oa$  rispetto alla coppia di rette costituita dalla retta  $R$  insieme alla tangente in  $a$  alla curva  $C_m$ .

In particolare: se  $\alpha = m - 1$ , il luogo  $\Theta_0^*$  si scinde nelle  $m$  rette che congiungono il punto  $O$  ai punti in cui la curva  $C_m$  è incontrata dalla retta  $R$ .

83. Particularizzando in vari modi le curve  $C_a$ ,  $C_s$  e  $C_p$ , considerate nella ricerca del n° 76, si giungerebbe facilmente, con l'aiuto delle proposizioni fondamentali del § VII, ad altre proprietà relative a vincoli esistenti fra i punti di contatto delle tangenti condotte da un punto ad una o a più curve algebriche. Ma noi invece, nel dar termine a questo paragrafo, preferiamo di applicare ad un particolare esempio alcune di quelle proprietà della curva  $\Sigma$  relativa ad un fascio di curve, che furono dimostrate nel § X. A tal uopo riassumeremo una parte di quelle proposizioni nell'enunciato seguente, il quale metterà in evidenza i legami che esistono fra i punti di flesso di due curve dello stesso ordine, i loro punti d'incontro ed i punti doppi del fascio dalle medesime individuato.

**TEOREMA LV.** — Date nel piano due curve  $C$  e  $C'$ , dello stesso ordine  $n$ , le quali passano per un medesimo punto,  $O$ , risp. con  $\alpha$  ( $\geq 0$ ) ed  $\alpha'$  ( $\geq 0$ ) rami a tangenti distinte e diverse, esiste una curva,  $\Sigma$ , dell'ordine  $6(n - 1)$  (Teor. XLVI), la quale:

1° se  $\alpha \neq \alpha'$ , passa pel punto  $O$  con  $3(\alpha + \alpha') - 4$  rami,  $\alpha + \alpha'$  dei quali toccano in  $O$  le  $\alpha$  tangenti della curva  $C$  e le  $\alpha'$  tangenti della curva  $C'$  (Teor. XLVII); e se  $\alpha = \alpha'$ , passa pel punto  $O$  con  $3(2\alpha - 1)$  rami,  $2\alpha + 1$  dei quali toccano in  $O$  le  $2\alpha + 1$  rette ciascuna delle quali ha  $\alpha + 2$  intersezioni riunite in  $O$  con una curva del fascio  $(C, C')$  (Teor. XXXVIII e Teor. L);

2° passa con tre rami per ciascuno degli  $n^2 - \alpha\alpha'$  ulteriori punti comuni alle curve  $C$  e  $C'$ ; in uno qualunque dei quali,  $a$ , ha per tangenti le tangenti stazionarie di quelle tre curve del fascio  $(C, C')$  dotate di un flesso nel punto  $a$  (Teor. XXXVIII e Teor. L per  $r = 1$ );

3° passa con due rami per ciascuno dei

$$3(n - 1)^2 - [(\alpha + \alpha' - 1)^2 - \alpha\alpha'] \quad (\text{se } \alpha \neq \alpha')$$

$$3(n - 1)^2 - (\alpha - 1)(3\alpha + 1) \quad (\text{se } \alpha = \alpha')$$

ulteriori punti doppi del fascio  $(C, C')$ ; in uno qualunque dei quali ha le stesse tangenti di quella curva del fascio per la quale quel punto è doppio (n° 47, Teor. XLII, n° 50 e Teor. XLVII per  $r = 0$ ,  $p = 2$ );

4° finalmente, passa con un ramo per ciascuno dei

$$3 [2n(n-2) - \alpha(\alpha-1) - \alpha'(\alpha'-1)]$$

punti di flesso delle curve  $C$  e  $C'$  (n<sup>i</sup> 72, 73 e Teor. XLVI, 8).

Supposto  $\alpha \leq \alpha'$ , i 3  $[n(n-2) - \alpha(\alpha-1)]$  flessi della curva generica del fascio  $(C, C')$  (Teor. II e n<sup>i</sup> 72, 73) costituiscono il gruppo delle intersezioni mobili di questa curva con il luogo  $\Sigma$ . (\*)

(\*) 1. Otto punti  $b_1, b_2, \dots, b_8$  individuano nel piano:

1° il nono punto base,  $b_9$ , del fascio, ( $C_3$ ), costituito dalle cubiche che passano per  $b_1, b_2, \dots, b_8$ ;

2° nove terne di rette, una qualunque delle quali,  $(t_i^{(1)}, t_i^{(2)}, t_i^{(3)})$ , è composta delle tre tangenti stazionarie in  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ) di quelle tre curve del fascio ( $C_3$ ) che hanno ivi un flesso;

3° dodici punti,  $d_1, d_2, \dots, d_{12}$ : i punti doppi del fascio ( $C_3$ );

4° dodici coppie di rette, una qualunque delle quali,  $(\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)})$ , è composta delle due tangenti in  $d_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 12$ ) a quella curva del fascio ( $C_3$ ) che ha ivi un punto doppio.

In virtù del Teorema LV (per  $n=3, \alpha=\alpha'=0$ ) i 21 punti  $b_1, b_2, \dots, b_9, d_1, d_2, \dots, d_{12}$  sono situati in una curva del 12° ordine, la quale:

a) passa con tre rami pel punto  $b_i$  ed ha ivi per tangentи le rette  $t_i^{(1)}, t_i^{(2)}, t_i^{(3)}$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ );

b) passa con due rami pel punto  $d_j$  ed ha ivi per tangentи le rette  $\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}$  ( $j = 1, 2, \dots, 12$ );

c) contiene i 9 punti di flesso di ogni curva del fascio ( $C_3$ ).

2. Per  $n=2$  il luogo  $\Sigma$  del Teor. LV è del 6° ordine e si scinde nelle 6 rette che congiungono due a due i 4 punti base del fascio di coniche.

3. Siano:  $C_n$  una curva d'ordine  $n$  con un punto  $(n-1)$ -plo ordinario,  $O$ ;  $(b)$  un gruppo di  $n$  punti presi ad arbitrio sulla curva  $C_n$ ;  $\Delta_n$  il gruppo delle  $n$  rette che congiungono il punto  $O$  ai singoli punti  $(b)$ ;  $d_i$  il punto in cui una qualsiasi,  $t_i$ , delle  $n-1$  tangenti in  $O$  alla curva  $C_n$  è ulteriormente incontrata dalla curva d'ordine  $n-1$ ,  $C_{n-1}^{(1)}$ , la quale: passa con  $n-2$  rami pel punto  $O$ , ha ivi per tangentи le rette  $t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}$  e passa con un ramo per ciascuno dei punti  $(b)$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ).

In virtù del Teorema LV il luogo  $\Sigma$  relativo al fascio d'ordine  $n$  ( $C_n, \Delta_n$ ) è dell'ordine  $6(n-1)$  e passa: con  $3[n + (n-1)] - 4 = 6n - 7$  rami pel punto  $O$ ,  $2n-1$  dei quali hanno ivi per tangentи le  $n-1$  rette  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ .

84. Siano:

$C_n$  una curva d'ordine  $n$  con un punto  $(n-1)$ -plo ordinario,  $O$ ;

$\Delta_{n-1}$  il gruppo delle  $n-1$  tangenti in  $O$  alla curva  $C_n$ ;

$\Delta_{3(n-1)}$  il gruppo delle rette che congiungono il punto  $O$  ai

$$3n(n-2) - 3(n-1)(n-2) = 3(n-2)$$

punti di flesso della curva  $C_n$  (n<sup>i</sup> 72, 73);

$R, R', R''$  tre rette fissate ad arbitrio nel piano.

I quattro luoghi d'ordine  $n$ :

$$R.\Delta_{n-1}, R'.\Delta_{n-1}, R''.\Delta_{n-1}, C_n$$

e le  $n$  rette  $\Delta_n$ ; con tre rami per ciascuno degli  $n$  punti ( $b$ ); con due rami per ciascuno degli  $n-1$  punti  $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ , in uno qualsiasi dei quali,  $d_i$ , ha per tangenti la retta  $t_i$ , e la tangente in  $d_i$  alla curva  $C_{n-1}^{(i)}$ ; e finalmente con un ramo per ciascuno dei  $(n^i 72, 73)$ :  $3n(n-2) - 3(n-1)(n-2) = 3(n-2)$  punti di flesso della curva  $C_n$ . Conseguentemente, il luogo  $\Sigma$  si scinde: 1° nelle  $n$  rette  $\Delta_n$ , ciascuna contata due volte; 2° nelle  $n-1$  rette  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ ; 3° in un luogo residuale, dell'ordine  $6(n-1) - 2n - (n-1) = 3n - 5$ , il quale: passa con  $(6n-7) - 2n - (n-1) = 3n - 6$  rami pel punto  $O$ ; passa con un ramo per ciascuno degli  $n$  punti ( $b$ ); passa con un ramo per ciascuno degli  $n-1$  punti  $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ , in uno dei quali,  $d_i$ , è tangente alla curva  $C_{n-1}^{(i)}$ ; e passa con un ramo per ciascuno dei  $3(n-2)$  punti di flesso della curva data  $C_n$ .

Si ha quindi la seguente proposizione:

Se sopra una curva  $C_n$ , d'ordine  $n$ , con un punto  $(n-1)$ -plo ordinario,  $O$ , si assume ad arbitrio un gruppo, ( $b$ ), di  $n$  punti, e si indica con  $d_i$  il punto in cui una,  $t_i$ , delle  $n-1$  tangenti in  $O$  alla curva  $C_n$  è ulteriormente incontrata dalla curva d'ordine  $n-1$ ,  $C_{n-1}^{(i)}$ , che passa per  $O$  con  $n-2$  rami ivi tangentii alle rette  $t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}$  e passa semplicemente per ciascuno dei punti ( $b$ ) ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), allora esiste una curva d'ordine  $3n-5$ , la quale:

1° ha in  $O$  un punto  $(3n-6)$ -plo;

2° passa con un ramo per ciascuno degli  $n$  punti ( $b$ );

3° passa con un ramo per ciascuno degli  $n-1$  punti ( $d$ );

4° in uno,  $d_i$ , degli  $n-1$  punti ( $d$ ) tocca la curva  $C_{n-1}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ );

5° passa con un ramo per ciascuno dei  $3(n-2)$  punti di flesso della curva data  $C_n$ .

individuano un sistema lineare triplamente infinito d'ordine  $n$ :

$$[C_n] \equiv [R \cdot \Delta_{n-1}, R' \cdot \Delta_{n-1}, R'' \cdot \Delta_{n-1}, C_n],$$

il quale possiede in  $O$  un punto base  $(n - 1)$ -plo a tangentи fisse: le  $n - 1$  tangentи  $\Delta_{n-1}$  della curva  $C_n$ .

Poichè ogni curva del sistema  $[C_n]$  può essere ottenuta come curva del fascio

$$(C_n^*) \equiv (R^* \cdot \Delta_{n-1}, C_n),$$

dove  $R^*$  è una retta che varia nella rete  $[R, R', R'']$  (ossia una retta qualunque del piano) (n° 1, a), ne segue che il sistema  $[C_n]$  gode altresì della proprietà che la sua curva generica incontra ulteriormente la curva data  $C_n$  in  $n^2 - (n - 1)^2 = (n - 1) = n$  punti situati in linea retta (\*).

Reciprocamente, ogni curva d'ordine  $n$ , la quale passa pel punto  $O$  con  $n - 1$  rami ivi tangentи alle rette  $\Delta_{n-1}$  ed incontra la curva  $C_n$  in gruppi mobili di  $n$  punti situati in linea retta appartiene al sistema  $[C_n]$ . Infatti, se  $C_n^*$  è una di queste curve ed  $R^*$  è la retta che contiene gli  $n$  punti in cui la curva medesima incontra ulteriormente  $C_n$ , il fascio  $(C_n^*, C_n)$  conterrà necessariamente il luogo composto  $R^* \cdot \Delta_{n-1}$ ; epperò la curva  $C_n^*$  apparterrà al fascio  $(C_n^*) \equiv (R^* \cdot \Delta_{n-1}, C_n)$  e conseguentemente al sistema  $[C_n]$ .

Ciò premesso cerchiamo il luogo  $\Sigma$  (Teor. XLVI) relativo al fascio  $(C_n^*)$ .

Siccome questo fascio contiene una curva costituita da un gruppo,  $\Delta_n$ , di  $n$  rette uscenti da  $O$  (Teor. V, nota), così considereremo il fascio medesimo come individuato dai due luoghi d'ordine  $n$ :  $R^* \cdot \Delta_{n-1}$  e  $\Delta_n$ , e scriveremo:

$$(C_n^*) \equiv (R^* \cdot \Delta_{n-1}, \Delta_n).$$

Pertanto, applicando il Teorema LV troviamo subito che il luogo  $\Sigma$  relativo al fascio  $(C_n^*)$  passa: con

$$3[(n - 1) + n] - 4 = 6n - 7$$

(\*) Conseguentemente: due curve qualunque del sistema  $[C_n]$  s'incontrano in un gruppo mobile di  $n$  punti situati in linea retta.

rami pel punto  $O$ ; con tre rami per ciascuno degli  $n$  punti d'incontro della retta  $R^*$  con i raggi del gruppo  $\Delta_n$ ; e con due rami per ciascuno degli  $n - 1$  punti d'incontro della retta  $R^*$  con i raggi del gruppo  $\Delta_{n-1}$ . Ma siccome ogni punto di una qualsiasi delle rette costituenti i gruppi  $\Delta_{n-1}$ , e  $\Delta_n$  è da considerarsi come flesso di una curva del fascio  $(C_n^*)$ , così il luogo  $\Sigma$ , che è dell'ordine  $6(n - 1)$ , si scinderà nelle  $2n$  rette  $R^*\cdot\Delta_{n-1}$ ,  $\Delta_n$  ed in un luogo residuale d'ordine

$$6(n - 1) - 2n = 4n - 6,$$

il quale, dovendo passare: con

$$(6n - 7) - (n - 1) - n = 4n - 6$$

rami pel punto  $O$ , con un ramo per ciascuno degli  $n$  punti d'incontro della retta  $R^*$  coi raggi del gruppo  $\Delta_n$  e con un ramo per ciascuno dei  $3(n - 2)$  flessi della curva  $C_n$ , si scinderà alla sua volta nelle  $4n - 6$  rette  $\Delta_n \cdot \Delta_{3(n-2)}$ . Donde si conclude che il luogo  $\Sigma$  relativo al fascio particolare  $(C_n^*)$  si compone della retta  $R^*$ , delle  $n - 1$  rette  $\Delta_{n-1}$ , delle  $n$  rette  $\Delta_n$ , ciascuna contata due volte, e delle  $3(n - 2)$  rette  $\Delta_{3(n-2)}$ . Epperò:

**TEOREMA LVI.** — *Data nel piano una curva  $C_n$  d'ordine  $n$  con un punto  $(n - 1)$ -plo ordinario,  $O$ , tutte le curve d'ordine  $n$ , le quali hanno in  $O$  un punto  $(n - 1)$ -plo con le stesse tangenti di  $C_n$  ed incontrano ulteriormente  $C_n$  in gruppi di  $n$  punti situati in linea retta costituiscono un sistema lineare triplamente infinito (nel quale è contenuta  $C_n$ ) tale, che i  $3(n - 2)$  flessi della relativa curva generica descrivono  $3(n - 2)$  rette concorrenti nel punto  $O$ .*

(CONTINUA).

Lana an der Etsch,  
Gardscheit  
8 ottobre 1894.

G. B. GUCCIA.

## ERRATA-CORRIGE E NOTE.

1) *Mem. I<sup>a</sup>, n<sup>o</sup> 5:* Il Corollario che avevo rapidamente indicato in una nota più della pag. 197 (e del quale non ho fatto alcun uso in queste *Ricerche*), nei termini in cui trovasi ivi enunciato è erroneo; epperò prego il lettore di considerarlo come nullo.

2) *Mem. I<sup>a</sup>, §§ IV e V:* Per inavvertenza, negli enunciati del Lemma del n<sup>o</sup> 16 e dei Teoremi VI, VII e VIII è stata omessa la condizione  $n_i \geq k$ , che il Lettore avrà potuto restituire da sè osservando, che nelle ricerche di quei due paragrafi si considerano sistemi lineari  $\infty^k$  segati da una retta arbitraria in gruppi di un'involuzione di grado  $n$ ; e specie  $k$ , la cui definizione implica (cfr. *Due proposizioni*, etc., n<sup>o</sup> 1) la condizione  $n_i \geq k$ .

3) *Mem. II<sup>a</sup>, Teor. XL:* Nell'ipotesi particolare in cui tutte le  $r$  tangenti in  $B$  alla curva generica del fascio dato sono supposte mobili, cfr. la interessante Memoria del prof. Chizzoni: *Sopra le involuzioni nel piano* (Mem. Acc. Lincei, vol. XIX, 1884), n<sup>o</sup> 14, dove trovasi indicato che il luogo  $\Phi_p$  passa con  $2r - 1$  rami per il punto  $B$  e che una delle sue  $2r - 1$  tangenti in  $B$  è la retta  $PB$ .

4) *Mem. II<sup>a</sup>, n<sup>o</sup> 57:* La proprietà che tutte le curve  $\Phi$  relative ad un fascio dato costituiscono una rete devevi attribuire al prof. Chizzoni, il quale ebbe a dimostrarla nel n<sup>o</sup> 14 della sua Memoria (loco citato).

5) *Mem. II<sup>a</sup>, n<sup>o</sup> 58:* A pag. 30, linea 30, ed a pag. 31, linea 1, leggasi  $(\Phi)_R$  in vece di  $(\Phi_R)$ .

6) *Mem. II<sup>a</sup>, Teor. XLVIII:* In luogo di «... , le cui tangenti sono: » leggasi: «... , fra le cui tangenti sono da comprendere: ».

7) Per la determinazione dei numeri  $\mu_k$  e  $\xi_{k-1}$  della Nota: *Una definizione sintetica delle curve polari* (questi Rendiconti, t. VII, 1893, pp. 263-272) (estratta da un §, tutt'ora inedito, della Memoria III<sup>a</sup> di queste *Ricerche*) sostituisca la seguente dimostrazione, a quella esposta nel n<sup>o</sup> 1 della Nota medesima.

Siano:  $[C]^k$  un sistema lineare di curve d'ordine  $n$  e dimensione  $k$  ( $k < n$ );  $P$  un punto fissato ad arbitrio nel piano;  $\Phi_p^k$  il luogo dei punti in cui rette condotte dal punto  $P$  hanno contatti d'ordine  $k$  con curve del sistema  $[C]^k$ ;  $\mu_k$  l'ordine del luogo  $\Phi_p^k$ ;  $\xi_{k-1}$  il grado di molteplicità del punto  $P$  per la curva  $\Phi_p^k$ , ossia:

a) il numero delle rette uscenti dal punto  $P$ , ciascuna delle quali ha ivi un contatto d'ordine  $k$  con una curva del sistema  $[C]^k$ , ossia:

b) il numero delle rette uscenti da un punto  $P$ , ciascuna delle quali ha ivi un contatto d'ordine  $k$  con una curva di un sistema lineare  $[C]^{k-1}$ , di dimensione  $k - 1$ , dotato in  $P$  d'un punto base semplice a tangente mobile, ossia:

c) il grado di molteplicità di un punto  $P$  per il luogo  $\Phi_p^{k-1}$  relativo ad un

sistema lineare  $[C]^{k-1}$ , di dimensione  $k - 1$ , dotato in  $P$  d'un punto base semplice a tangente mobile.

Una retta  $R$ , condotta ad arbitrio per il punto  $P$ , incontra le curve del sistema  $[C]^k$  in gruppi di  $n$  punti, i quali costituiscono un'involuzione di grado  $n$  e specie  $k$ . I  $(k+1)(n-k)$  punti  $(k+1)$ -pli di questa involuzione sono i punti in cui la retta  $R$ , uscente da  $P$ , incontra ulteriormente il luogo  $\Phi_P^k$ . Si ha quindi:

$$(\alpha) \quad \mu_k = (k+1)(n-k) + \xi_{k-1}.$$

Il luogo  $\Phi_P^{k-1}$ , relativo al sistema lineare  $[C]^{k-1}$  costituito dalle curve di  $[C]^k$  che passano per  $P$ , è dell'ordine  $\mu_{k-1}$  e passa  $[c]$  con  $\xi_{k-1}$  rami per il punto  $P$ . D'altra parte, i punti in cui una retta, condotta ad arbitrio per  $P$ , incontra ulteriormente il luogo  $\Phi_P^{k-1}$ , sono i  $k(n-k)$  punti  $(k)$ -pli dell'involuzione di grado  $n-1$  e specie  $k-1$  costituita dai gruppi di  $n-1$  punti in cui la retta medesima è incontrata dalle curve di  $[C]^{k-1}$ . Si ha dunque:

$$(\beta) \quad \mu_{k-1} = k(n-k) + \xi_{k-1}.$$

Ciò posto, eliminando  $\xi_{k-1}$  dalle  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  si ottiene la formula di ricorrenza:

$$\mu_k = \mu_{k-1} + n - k;$$

dalla quale, essendo  $\mu_1 = 2n - 1$  (queste *Ricerche*, n° 39; ovvero: *Una definizione, etc., n° 1, a*), si deduce:

$$\mu_k = \frac{(k+1)(2n-k)}{2}$$

e conseguentemente  $(\alpha)$ :

$$\xi_{k-1} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

G. D. D.

G. B. G.

SUR LES COURBES HYPERELLIPTIQUES

POR TANT

DES CORRESPONDANCES UNIVOQUES;

par M. S. Kantor.

Adunanza del 22 luglio 1894.

1. Un intérêt particulier distingue ces courbes des autres courbes à correspondance univoque interne, en tant que les correspondances sur elles sont toujours contenues dans des transformations birationnelles planes, sans avoir besoin de subir une transformation simplement rationnelle (\*). Pour étudier les propriétés purement algébriques on peut se borner à la courbe normale  $C_n(a)^{n-2}$ . Je vais construire toutes les transformations birationnelles qui y appartiennent.

THÉORÈME I. — *Les points de contact des tangentes menées de a à la courbe doivent être joints entre eux en des cycles de la correspondance.*

C'est une conséquence de la continuité de la correspondance, l'involution inhérente  $g_2^1$  étant changée en soi-même.

THÉORÈME II. — *Lorsque les tangentes sortant de a sont jointes par des cycles d'une homographie binaire, la courbe possède une correspondance univōque.*

---

(\*) Ces transpositions simplement rationnelles furent employées la première fois par M. A. Hurwitz (Math. Ann., Bd. 32).

C'est ce qui est prouvé immédiatement par l'expression

$$y = Q(x) \pm \sqrt{R(x)}$$

de la courbe, et ce qui résultera aussi par la construction de la transformation birationnelle relative, qui sera achevée au théorème XXVII. J'ai déjà étudié le cas le plus particulier, savoir celui où existe une cubique invariantive et cela montrait que les cycles ne doivent pas être assujettis à aucune condition. Une seconde preuve est le cas, où la courbe  $C_n(a)^{n-2}$  est dégénérée en une  $C_n(a)^{n-1}$  et le point  $a$ , celui-ci comptant pour  $n=0$  avec les singularités  $a^{-1}, a_1^0=a_2^0=\dots$

Si la condition du Théorème II est satisfaite, il y a toujours deux correspondances, dont l'une est la composition de l'autre avec l'involution inhérente. Il faut distinguer les cas d'indice pair et impair. Si l'indice  $b+1$  entre les droites par  $(ab)$  est impair, il y a toujours une des correspondances, qui contient l'involution inhérente et une, qui ne la contient pas. Si  $b+1$  est pair, il existe deux espèces essentiellement différentes de courbes : 1° celles où toutes les deux correspondances contiennent l'involution inhérente et 2° celles où aucune des deux correspondances ne contient l'involution inhérente.

Pour  $b+1$  impair, parmi les points de contact sortis de  $a$  existe un seul point double ou deux points doubles ou n'existe nul point double, suivant que les autres points de contact s'arrangent en un nombre impair ou pair de cycles. Pour  $b+1$  pair, parmi les points de contact n'existe nul point double ou il en existe deux. Tous ces cas sont effectifs, parce qu'on peut construire la fonction  $\varphi_0\varphi_1 + \varphi_1^2$  pour  $x_1\varphi_0 + 2\varphi_1, x_1 - \varphi_1 = 0$  tellement, à satisfaire à une quelconque de ces propriétés.

**THÉORÈME III.** — Pour  $b+1$  impair existent 6 espèces de correspondances  $\Gamma$  :

1.  $\Gamma$  peut avoir l'indice  $b+1$  et 3 points doubles, l'un d'eux entre les points de contact;
2.  $\Gamma$  peut avoir l'indice  $2(b+1)$  et 1 point double et une couple involutive;
3.  $\Gamma$  peut avoir l'indice  $b+1$  et 2 points doubles;
4.  $\Gamma$  peut avoir l'indice  $2(b+1)$  et 2 points doubles;

5.  $\Gamma$  peut avoir l'indice  $b+1$  et 4 points doubles libres;  
 6.  $\Gamma$  peut avoir l'indice  $2(b+1)$  et 2 couples involutives, sans point double.

THÉORÈME IV. — Pour  $b+1$  pair existent 2 espèces de correspondances  $\Gamma$ :

7.  $\Gamma$  peut avoir l'indice  $b+1$  et deux points doubles libres et une couple involutive;  
 8.  $\Gamma$  peut avoir l'indice  $2(b+1)$  et deux points doubles entre les points de contact.

Les correspondances 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6 sont toujours simultanées, 7 et 8 s'excluent. La cubique équianharmonique est un exemple pour 1 et 2, la cubique harmonique pour 7 et 8. Une certaine  $C_4$ , qui se rencontre dans les transformations typiques est un exemple pour 3, 4, 5, 6.

2. THÉORÈME V. — Lorsqu'une courbe  $C_n(a)^{m-2}$  à  $p > 2$  admet une correspondance univoque, il existe toujours une transformation birationnelle du plan, qui contient les cycles de cette correspondance.

Dém. Par la correspondance la série  $g_2^2$  découpée par les droites du plan est changée en une série  $g_m^2$ , qui doit contenir la série  $g_2^1$  inhérente. Mais aucun faisceau de courbes n'existe, qui découpe cette  $g_2^1$ , excepté les droites par  $(ab)$ ; il faut donc, que le faisceau des courbes nouvelles se décompose en ce faisceau et en une courbe commune. A cela suffit un système de  $C_n$ , qui passent par  $(ab)^{m-1}$  et l'équation  $nm - (n-1)(m-2) = n = m$  démontre, que  $2(n-1)$  points de base doivent être sur la courbe  $C_n$ .

THÉORÈME VI. — Il existe une infinité de transformations birationnelles non involutives, qui contiennent tous les points d'une courbe  $C_n(a)^{m-2}$  comme des points doubles.

Dém. Une transformation d'un ordre  $< n$  ne pouvant pas exister, il s'agit des transformations de l'ordre  $n$ . Suivant les rapports doubles sur les droites par  $a$  les droites se rangent en des groupes d'une involution  $J_{2(n-1)}$  (\*). Il faut donc établir une involution de l'ordre

(\*) Voir mon Mémoire couronné: « Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques » Atti della P. Accademia delle scienze di Napoli, 2<sup>a</sup> serie, III, 2; IV, 7).

$2(n - 1)$ , qui contient les tangentes menées de  $a$  en un groupe. Un autre se trouvera de la manière suivante : On cherche  $2(n - 1)$  points de la courbe tels que les courbes  $C_{n-1}(a)^{n-2}$  passant par eux et par les points opposés sur la courbe ont en  $a$  les mêmes  $n - 2$  tangentes pour satisfaire au Lemme qui suit.

**LEMME.** — Les deux courbes fondamentales de  $a$  dans une transformation à  $\infty^1$  droites invariantives ont en  $a$  les mêmes tangentes, qui sont identiques aux tangentes du lieu des points doubles,  $C_n(a)^{n-2}$ .

Cela fait  $n - 2$  conditions pour les  $2n - 2$  droites du second groupe et on peut donc prendre  $n$  droites arbitrairement, qui doivent porter le même  $D = \infty$ . L'involution ainsi déterminée est employée de la manière suivante. On prend la valeur  $D = 1$  pour le groupe des  $2(n - 1)$  tangentes,  $D = \infty$  pour le groupe des  $2(n - 1)$  droites récemment trouvées. Comme on peut considérer  $D + \frac{1}{D}$  comme paramètre, la distribution des  $D$  et dès lors la transformation est achevée.

Surtout les  $n - 1$  points d'intersection des deux courbes fondamentales donnent, liés à  $a$ ,  $n - 1$  droites qui forment, deux fois comptées, le groupe pour  $D = -1$ .

Ainsi par la découverte du système fondamental sur  $C_n(a)^{n-2}$  la transformation est parfaitement déterminée (*Voir* plus loin n° 4).

3. **THÉORÈME VII.** — *Les tangentes par a à  $C_n$  touchent  $C_n$  en  $2(n - 1)$  points et les courbes  $C_{n-1}(a)^{n-2}$ , qui passent par ces points, ont toutes en a les mêmes tangentes que  $C_n$ .*

*Dém.* Si l'on fait passer par  $a$   $2(n - 1)$  droites, qui coupent la courbe en  $2(2n - 2)$  points tels que par eux passent deux courbes  $C_n(a)^{n-2}$ ,  $C'_n(a)^{n-2}$  qui ont en  $a$  les mêmes tangentes, on pourra former un faisceau de  $C_{2(n-1)}$ , qui contient le faisceau de  $2(n - 1)$  droites et la composition des deux courbes  $C_{n-1} + C'_{n-1}$ . Donc toutes les courbes du faisceau passent par les  $2(2n - 2)$  points sur  $C_n$  et ont en  $a$  les  $2n - 4$  tangentes en commun jusqu'à s'y osculer. Les autres  $n - 2$  points d'intersection des courbes de ce faisceau sont dépendants et une courbe du faisceau doit se partager en la

$C_n$  donnée et en un faisceau de  $n - 2$  droites par  $a$ . Ces droites doivent être des tangentes communes à toutes les courbes du faisceau et aussi tangentes à la courbe  $C_n$ , parce que dans le faisceau existe une courbe, qui possède une multiplicité supérieure, de deux unités, à la multiplicité de la courbe générale du faisceau. Donc si les deux courbes  $C_{n-1}$  existent, il faut qu'elles soient toutes les deux tangentes en  $a$  aux branches de la courbe  $C_n$ . (\*)

4. Cela donne enfin la construction nécessaire pour la preuve complète du théorème VI. On peut prendre  $n$  points arbitraires sur  $C_n$ , faire passer par eux une courbe  $C_{n-1}(a)^{n-2}$ , tangente à toutes les branches de  $C_n$  en  $a$ , qui est déterminée par conséquent. Elle coupe  $C_n$  en  $n - 2$  autres points. En projetant les  $2(n - 1)$  points, qui sont différents de  $a$ , sur la courbe  $C_n$ , on obtient  $2(n - 1)$  points, par lesquels passe une courbe  $C_{n-1}(a)^{n-2}$ , qui a les mêmes tangentes en  $a$  que la première  $C_{n-1}$ , savoir les tangentes de  $C_n$ .

Ces deux courbes seront les courbes fondamentales d'une transformation de Jonquières. La distribution des rapports  $D$  aux groupes de l'involution  $J$  est donc accomplie en conséquence.

5. Par la composition de deux transformations du degré  $n$  l'une après l'autre on obtient des transformations de Jonquières d'un ordre supérieur et réciproquement.

THÉORÈME VIII.—*Toutes les transformations birationnelles non involutives, qui possèdent la courbe  $C_n(a)^{n-2}$  donnée pour lieu de points doubles, peuvent être obtenues par la composition de plusieurs transformations de Jonquières du  $n^{\text{ième}}$  degré.*

Dém. En effet, on prend pour une telle transformation  $n$  des points fondamentaux simples pour la construction du n° 4 et on compose la transformation obtenue du  $n^{\text{ième}}$  degré avec la transformation du degré supérieur. On aura le degré  $m.n - (m - 1)(n - 1)$

(\*) Le théorème du texte complète un théorème dû à Caporali sur les tangentes des courbes menées d'un point multiple (Rend. Acc. Napoli, giugno 1881). Cela fait prévoir, qu'aussi le théorème général, qu'il donne !. c., ne sera pas complet, et que d'autres conditions encore existent pour les points de contact.

$-n = m - 1$ , donc diminution du degré d'une unité. En continuant ainsi on arrivera à une transformation du  $n^{\text{ème}}$  degré. Par  $n$  de ses points fondamentaux simples les autres sont déterminés et nulle diminution ultérieure n'existe.

6. Pour une telle transformation le lieu des points doubles consiste effectivement en la  $C_n$  donnée et en  $m - n$  droites remplies de points doubles.

Lorsqu'on obtient la transformation comme composition de  $T_n$ ,  $T_{n'}$ , ces droites sont celles qui ont dans les deux transformations le même rapport double  $D$ . En effet, les deux involutions  $J_D$  sont en relation projective par l'égalité de  $D$  et possèdent  $4(n - 1)$  coïncidences. Parmi elles sont les  $2(n - 1)$  tangentes de  $C_n$  par  $a$ , pour  $D = 1$ , et  $n - 2$  sont les tangentes en  $a$ , pour  $D = -1$ . Les autres  $n - 1$  consistent en les  $\delta$  droites fondamentales coïncidentes de  $T_n$ ,  $T_{n'}$  pour  $D = 0, \infty$  et en  $n - 1 - \delta$  autres pour  $D$  arbitraires. Or la transformation  $T_n$ ,  $T_{n'}$  a le degré

$$n \cdot n - (n - 1)^2 - \delta = 2n - 1 - \delta$$

et donc en dehors de  $C_n$  une courbe  $n - 1 - \delta$ , comme il faut. Donc :

THÉORÈME IX. — Il existe une infinité illimitée de transformations de Jonquieres, qui ont  $C_n(a)^{n-2}$  comme lieu de points doubles.

THÉORÈME X. — Les involutions  $J_D^{n-2}$  produites à la suite de la distribution des  $D$  forment pour les  $\infty^*$   $T_n$  un système linéaire d'involutions, qui ont en commun un  $(2n - 2)$ -tuple.

Dém. Comme nous n'avons pas distingué les rapports doubles réciproques, la donnée de  $n$  droites d'un groupe détermine, pour chaque  $D$ ,  $n$  points de chaque courbe fondamentale et ensuite la transformation et sa reciproque, ainsi que l'involution  $J_D$  et à cause de la fin du n° 7 il n'y a pas  $\infty^{**}$ , mais seulement  $\infty^*$  involutions de droites.

THÉORÈME XI. — Les groupes à une même valeur de  $D + \frac{1}{D}$ , pris dans toutes ces involutions forment eux-mêmes une involution de la dimension  $n$ .

*Dém.* Car en prenant  $n$  droites comme des porteurs de  $D + \frac{I}{D}$  on a détermination suffisante de la transformation et donc aussi de l'involution et partant du groupe à  $D$ ,  $\frac{I}{D}$ .

7. THÉORÈME XII. — *La transformation  $T_n$  est déterminée à une seule variabilité par  $n - 1$  droites, qui sont associées dans le groupe de  $J_D$ , qui a  $D = -1$ .*

*Dém.* En effet, par ces  $n - 1$  droites on a les  $n - 1$  points harmoniquement conjugués à  $a$  par rapport aux  $n$  couples de points d'intersection des droites avec  $C_n$  et par ces  $n - 1$  points passe un faisceau de  $C_{n-1}(a)^{n-2}$ , qui sont tangentes en  $a$  aux branches de  $C_n$ . Ces courbes se groupent en des couples de courbes fondamentales d'une transformation de Jonquières. Les courbes unies de cette involution sont la  $C_{n-1}(a)^{n-2}$  par les  $2(n - 1)$  points de contact sur  $C_n$ , dont  $a$  est le tangentiel, et d'autre part la courbe décomposée en les  $n - 1$  droites choisies. Cela fournit un  $\infty^1$  système d' involutions  $J_D$ , qui ont en commun deux groupes entiers, dont l'un consiste en  $n - 1$  droites deux fois comptées et qui se distinguent seulement par la distribution de  $D$ .

8. Le lemme du n° 2 fait usage implicitement du théorème, que les points de  $\Sigma$ , infiniment voisins à  $a$ , qui sont suivis par les branches de la courbe fondamentale, correspondent aux points de la courbe fondamentale de  $\Sigma'$ , infiniment voisins à  $a'$ . Ce théorème (\*) conduit à une nouvelle conclusion, que je tiens à reproduire.

Pour une transformation du  $m^{\text{ième}}$  degré on peut prendre une courbe  $C_m(a)^{m-2} a_1 \dots a_{2(n-1)}$  qui a ses  $(n - 1)m - (n - 2) \times (m - 2) - 2(n - 1)$  points d'intersection avec la courbe fondamentale en les  $n - 2$  points infiniment voisins à  $a$ . Une telle courbe

---

(\*) Plus généralement: Si dans une transformation ponctuelle entre  $R_r, R'_r$  une variété fondamentale  $V$  de  $R_r$  passe par un point fondamental  $F$ , la variété fondamentale  $\Phi'$  de  $F$  passe par le point fondamental  $P'$  de  $V$  de sorte, que les points voisins de  $F$  sur  $V$  correspondent aux points voisins de  $P'$  sur  $\Phi'$ .

est changée en une courbe de même nature et  $n$  points alignés sont portés en  $n$  points, qui avec les dits points près de  $a$  forment l'intersection de  $C_n(a)^{m-2}$  avec les courbes homaloïdales  $C_n(a)^{m-1}$  et sont alignés, par conséquent. Mais si  $m > n$  la transformation elle-même deviendrait une collinéation. Donc :

THÉORÈME XIII. — *Il existe une infinité de courbes  $C_m$  à  $m \leq n$  qui sont changées par une transformation de Jonquieres tellement, que ce changement entre leurs points est simultanément contenu dans une collinéation plane, mais ces collinéations ne sont pas les mêmes pour toutes ces courbes.*

*Corollaire.* Il n'existe aucune courbe  $C_n(a)^{m-2}$ ,  $m > n$ , qui aurait la propriété, que tous les points d'intersection avec la courbe fondamentale tombent en  $a, a_1, \dots, a_{2(n-1)}$ .

Parmi les répétitions de  $a, (a'_i, \text{ en } \dots, a_i)$  [ $i=1, 2, \dots, 2(n-1)$ ] (\*) existe toujours une, qui a tous ces points comme fondamentaux et est équivalente à la transformation originale. Une telle transformation possède toujours une courbe  $C_n(a)^{m-2}$  de la propriété demandée pour XIII ; donc :

THÉORÈME XIV. — *On obtient toutes les classes de transformations périodiques de Jonquieres à  $(ab)$ , en distribuant sur une courbe  $C_n(a)^{m-2}$ , qui est reproduite par une collinéation plane, les cycles enchaînés des droites  $a(a'_i \text{ en } \dots, a_i)$  tellement, que les cycles peuvent être ensemble un groupe  $D = o, \infty$  d'une involution  $J_D$ , qui appartient à la  $C_n(a)^{m-2}$ .*

9. Pour avoir la totalité des transformations birationnelles planes, qui reproduisent la courbe  $C_n(a)^{m-2}$ , on doit encore établir toutes les transformations, qui contiennent l'involution organique sur la courbe  $C_n$ . Ces transformations sont en infinité illimitée. On prend une courbe quelconque  $C_m(a)^{m-1}$  et construit sur chaque droite par  $a$  le point harmoniquement conjugué par rapport aux deux points d'intersection de la droite avec  $C_n(a)^{m-2}$ . Cette courbe est nouvellement une  $C_m(a)^{m-1}$  et les deux courbes sont directrices pour une transformation involutive du plan, qui contient la courbe  $C_n(a)^{m-2}$  donnée

---

(\*) Cfr. p. e. mon Mémoire: Journal f. d. Mathem., Bd. CXIV, p. 50.

comme invariantive,  $m' = mn - (m - 1)(n - 1) = m + n - 1$ .  
(Voir n° 10).

**THÉORÈME XV.** — *La transformation ainsi construite sera une transformation de Jonquieres du degré  $m + m'$ , qui a dans chaque point d'intersection de  $C_m$ ,  $C_{m'}$  deux points fondamentaux simples infinitement voisins dans la direction de la polaire de  $a$  par rapport à  $C_m + C_{m'}$ .*

**THÉORÈME XVI.** — *La transformation du moindre degré est celle, où  $a$  et  $C_{n-1}(a)^{n-2}$  par les  $2(n - 1)$  points de contact partant de  $a$  sont le lieu des points doubles.*

10. Mais on peut aussi construire des transformations involutives avec courbe lieu non décomposée ayant la  $C_n(a)^{n-2}$  comme lieu de couples involutives. Il faut établir le

**THÉORÈME XVII.** — *Chaque courbe  $C_n(a)^{n-2}$  invariantive dans la transformation involutive avec  $C_n(a)^{n-2}$  comme lieu de points doubles peut servir de lieu de points doubles d'une transformation involutive, dans laquelle la  $C_n(a)^{n-2}$  est invariantive, et réciproquement toutes les transformations sont produites de cette façon.*

Pour construire une courbe de cette espèce, on peut procéder ainsi.

On prend deux courbes  $C_m$ ,  $C_{m'}$ , conjointes comme ci-haut et sur chaque droite par  $a$  on détermine la couple jacobienne des deux couples sur  $C_n(a)^{n-2}$  et sur  $C_m + C_{m'}$ .

Quant au moindre degré d'une transformation involutive à courbe directrice non décomposée, c'est une question qui touche aux questions de l'Algèbre formale et semble ouvrir la perspective d'une nouvelle voie de recherches. Il peut exister des courbes  $C_n(a)^{n-2}$  qui admettent une conique comme invariantive ou qui de leur tour sont invariantives dans une inversion ordinaire et des courbes  $C_n(a)^{n-2}$  qui n'admettent pas de conique, mais une  $C_3(a)^2$  invariantive et réciproquement, et ainsi de suite.

On devra classifier les courbes  $C_n(a)^{n-2}$  d'après ce minimum.

**THÉORÈME XVIII.** — *Une courbe  $C_n(a)^{n-2}$  tout arbitraire n'admet pas de courbe directrice non décomposée d'un ordre moindre que  $n$ .*

11. La méthode des deux courbes  $C_m + C_{m'}$ , bien qu'elle soit  
*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 1<sup>a</sup>.—Stampato il 5 dicembre 1894 10

à l'apparition la plus particulière, permet toutefois une généralisation, en passant dans la transformation la plus générale du th. VII une courbe  $C_*(a)^{m-1}$  et sa transformée  $C_*$ , pour directrice d'une transformation ayant une involution  $I_*$ , soit la même que la transformation donnée. Chaque droite par  $a$  portera une affinité symétrique biverte, ce qui constitue une transformation symétrique biverte du plan.

12. J'ai appelé homologies supérieures les transformations de Jonquières, où la courbe directrice est une courbe  $C_*(a)^{m-1}$  et le point  $a$ . Les plus générales sont les suivantes : On établit entre les droites de  $a$  une involution  $I_*$ , en mettant une relation univoque entre les groupes et le rapport double  $D$  d'une homographie, qu'on institue sur chaque droite. (\*)

Seulement les homologies supérieures périodiques possèdent des courbes invariantives.

13. Lorsque  $C_*(a)^{m-1}$  porte une correspondance et qu'on connaît une transformation qui la contienne, on en déduit toutes les autres en composant cette transformation avec l'infinie des transformations du théorème VII. Comme une en existe toujours (voir n° 14 et 15) :

THÉORÈME XIX. — Il existe une infinité illimitée de transformations de Jonquières, qui contiennent toutes une même correspondance donnée sur une  $C_*(a)^{m-1}$ .

14. La correspondance étant cyclique et le problème limité aux transformations typiques, qui la contiennent comme des hémicycles, il est clair, que le nombre des points fondamentaux ne peut pas surpasser  $m$  ou  $m - 1$  ou  $m - 2$ . Voir mon Mémoire couronné, IV, § 7, où je démontre, que pour l'indice  $b + 1$  et le degré  $m$  l'ordre de la courbe des hémicycles  $M = (b + 1)m - b$ , d'où  $m = \frac{M + b}{b + 1}$ .

THÉORÈME XX. — Le moindre degré d'une transformation typique de

(\*) Même généralisation s'introduit déjà dans la théorie des homologies linéaires.

*Jonquière s, qui contient une courbe  $C_M(a)^{M-2}$  et où les  $2(M-1)$  tangentes sont divisées en des cycles de l'indice  $b+1$  est*

$$m = \frac{M+4}{b+1} \text{ ou } \frac{M+b+1}{b+1} \text{ ou } \frac{M+b+2}{b+1}.$$

Mais ce minimum n'existe pas toujours effectivement. Je l'appelle *transformation extraordinaire*.

THÉORÈME XXI. — Lorsque sur une courbe  $C_M(a)^{M-2}$  existe une correspondance univoque et qu'il arrive une seule fois, que  $M$  points alignés sont changés en  $M$  points d'une conique par  $a$ , cela arrive pour toutes les droites du plan et toutes les coniques passent par les mêmes deux points de la courbe.

Ce théorème sert à préciser les transformations quadratiques et il est une conséquence du théorème d'Abel, de même que le suivant :

THÉORÈME XXII. — Lorsque sur une courbe  $C_M(a)^{M-2}$  existe une correspondance univoque et qu'il arrive une seule fois, que  $M$  points alignés sont changés en  $M$  points d'une courbe  $C_m(a)^{m-1}$ , cela arrive pour toutes les droites du plan et toutes ces courbes se coupent en les mêmes  $mM - (m-1)M - 2 - M = 2(m-1)$  points sur  $C_M(a)^{M-2}$ .

THÉORÈME XXIII. — Les courbes tellement affectées admettent immédiatement une transformation du degré  $m$ , qui contient la correspondance sur la courbe  $C_M(a)^{M-2}$ .

Il suffit d'établir la coordination entre les droites et les courbes  $C_m$  du théorème précédent.

THÉORÈME XXIV. — Les transformations extraordinaires avec une  $C_M(a)^{M-2}$  invariantive sont en général périodiques.

Car  $m$  étant  $< M$  il est nécessaire, que chaque droite retourne à soi-même après  $b+1$  applications. Et il s'ensuit, que les  $2(m-1)$  points simples tombent de force sur les points de contact des tangentes par  $a$ , et que certains parmi ceux-ci se distinguent des autres. Du th. XIX se dérive :

THÉORÈME XXV. — Parmi les transformations planes, qui contiennent une correspondance sur  $C_M(a)^{M-2}$  en existe toujours des périodiques.

Il sera utile de noter ce Corollaire : Lorsqu'une répétition d'une

correspondance et la correspondance elle-même font partie de deux transformations extraordinaires, il faut que l'une de celles-ci soit une répétition de l'autre. Et encore :

THÉORÈME XXVI.—*Pour la même correspondance peuvent exister simultanément deux transformations des ordres  $m, m'$  seulement en tant que*

$$mm' - (m - 1)(m' - 1) = m + m' - 1 > M.$$

Sur les transformations non extraordinaires décide le théorème suivant.

THÉORÈME XXVII.—*Quand on fait passer par un groupe de  $(g_M^2)$  une  $C_n(a)^{m-1}$ , elle coupera  $C_M(a)^{M-2}$  en  $2m - 2$  points et le réseau de  $C_n(a)^{m-1}$  par ces points est capable de guider une transformation plane, qui a  $C_M(a)^{M-2}$  pour invariantive.*

*Ici  $(g_M^2)'$  est la série transformée, par la correspondance, de  $g_M^2$ . (\*)*

THÉORÈME XXVIII. — *Lorsque dans la série résiduelle de  $(g_M^2)$  existe un groupe, qui a  $\delta$  points communs avec un groupe  $g_{2m-2}$  de la série résiduelle de  $g_M^2$ , la courbe admettra une transformation extraordinaire du degré  $m + M - 1 - \delta$  et réciproquement.*

Ce théorème sert à éclaircir la nature de la distinction de plusieurs points-contact par  $a$  pour les transformations extraordinaires.

Par le n° 6 on peut conclure, qu'il y a des transformations de Jonquières apériodiques, dont la ligne des cycles, et des périodiques, dont la ligne des hémicycles se décompose en plusieurs droites par  $a$  et en une courbe  $C_n(a)^{m-2}$ .

THÉORÈME XXIX. — *En composant une transformation de cette nature avec celle de VII on obtient toutes les transformations, qui possèdent sur  $C_n(a)^{m-2}$  une correspondance contenant l'involution inhérente*

*Scholie.* De cette façon il peut arriver, que la ligne des hémicycles étant de l'ordre ordinaire, une courbe invariantive existe, qui est d'un ordre extraordinairement bas, p. e. on peut construire chaque type avec une conique anallagmatique ou, comme je le montrais l. c. avec une  $C_3$  anallagmatique.

---

(\*) Ou autrement: L'ordre de la transformation, qui transforme  $C_n(a)^{m-2}$  en soi-même, dépend de l'ordre de la courbe  $f_m(a)^{m-1}$  la plus basse, qui passe sur  $C_n$  par les  $n - 2$  points correspondants aux  $n - 2$  points voisins de  $a$  sur  $C_n$ .

15. Une autre manière, pour construire les transformations birationnelles, qui contiennent une correspondance univoque donnée entre les points d'une courbe  $C_n(a)^{m-2}$ , est la suivante. On prend une courbe  $C_m(a)^{m-1}$  arbitraire qu'on suppose être aussi invariantive par la transformation cherchée. L'homographie périodique entre les droites par  $(ab)$  est déterminée par la correspondance entre les points de  $C_n(a)^{m-2}$ . Ensuite on a sur chaque paire de droites correspondantes trois paires de points correspondants, pour construire une homographie binaire, à savoir : les points d'intersection des quatre droites avec  $C_n(a)^{m-2}$  et leurs points d'intersection avec  $C_m(a)^{m-1}$ . L'ensemble de toutes ces homographies binaires détermine une transformation, qui est périodique pour tout le plan. Car après  $b+1$  ou  $2(b+1)$  applications on arrive sur toutes les droites par  $(ab)$  à des homographies avec trois points doubles, qui sont donc des identités. Ces transformations périodiques sont très particulières parce qu'en général n'existe pas de courbe  $C_m(a)^{m-1}$  invariantive.

16. Pour avoir des transformations apériodiques, on peut prendre simplement deux courbes  $C_n(a)^{m-1}$  et  $C_m(a)^{m'-1}$  comme correspondantes et déterminer au moyen de la correspondance entre les points de  $C_n(a)^{m-2}$  et de celle entre  $C_n$  et  $C_m$ , sur toute paire de droites, qui se correspondent par l'homographie proposée, une homographie binaire de points. La transformation, qui est l'ensemble de toutes ces homographies, est une transformation  $T$  de Jonquières, qui contient la correspondance  $\Gamma$  sur  $C_n(a)^{m-2}$ .

Ici toutefois on doit distinguer les deux cas, si  $\Gamma$  contienne l'involution inhérente ou non, comme puissance. Au premier cas on aura après  $T^{b+1}$  sur chaque droite de  $(ab)$  une couple involutive et  $T^{b+1}$  est une involution du plan et  $T$  est périodique avec l'indice  $2(b+1)$ .

**THÉORÈME XXX.**—*Si  $\Gamma$  contient comme une puissance l'involution inhérente, toutes les transformations de Jonquières, qui contiennent  $\Gamma$ , sont périodiques. Ces transformations peuvent être construites dans toute la généralité moyennant une courbe  $C_n(a)^{m-2}$  et le cercle et le règlet.*

17. Si la correspondance  $\Gamma$  ne contient pas l'involution inhé-

rente, la transformation construite comme précédemment est apériodique en général. Toutefois on peut en construire aussi des périodiques, qui sont un peu plus générales que celles du n° 15. A cet effet s'offre une courbe  $C_{\infty}(a)^{m-2}$ , qui est invariantive dans une transformation involutive de Jonquières et qui a les tangentes par  $a$  réunies en des cycles de la même homographie que  $C_{\infty}$ . On la construit en prenant sur  $C_{\infty}$  ses points de contact sortis de  $a$  et en la faisant passer par les points de contact de  $C_{\infty}$  et parmi les courbes du système invariantif ainsi limité celles, qui sont invariantives dans l'involution de Jonquières avec  $C_{\infty}(a)^{m-2}$  comme lieu de points doubles.

Cela fait, on construit les homographies sur les paires de droites correspondantes comme au n° 16 au moyen des points de  $C_{\infty}$  et de ceux de  $C_{\infty}$ , ce qui est possible, parce que chaque homographie change les 4 points harmoniques en les 4 harmoniques sur la droite subséquente.

**THÉORÈRE XXXI.** — *La transformation ainsi construite sera périodique et d'un caractère tout général. Si la correspondance dans  $C_{\infty}$  est choisie de l'espèce 7, la transformation est équivalente à une collégation, si de l'espèce 8, la transformation a  $C_{\infty}$  pour lieu des hémicycles.*

Paris, le 13 mai 1894.

S. KANTOR.

SUI POSTULATI FONDAMENTALI  
DELLA  
GEOMETRIA PROGETTIVA.

*Corrispondenza.*

Adunanza dell'11 novembre 1894.

I.

(Lettera del Dr. G. Fano al Dr. F. Enriques).

La sua pregevolissima Nota « *Sui fondamenti della Geometria Proiettiva* » (Rend. Ist. Lomb., s. II, vol. XXVII) mi suggerisce alcune osservazioni, anche in relazione al mio lavoro sullo stesso argomento escito due anni or sono (Giorn. di Battaglini, vol. XXX).

Dopo quei primi postulati sulle forme fondamentali di prima e seconda specie, postulati che si riducono in sostanza a *tre* distinti e necessari (\*), e che bastano a stabilire, com'Ella osserva, i teoremi sulle *configurazioni*, due vie mi si erano presentate per procedere innanzi, e costruire una Geometria che fosse applicabile allo

---

(\*) Vale a dire: *Due punti determinano UNA retta che li contiene; ogni piano contiene tutta la retta determinata da due suoi punti qualunque; due rette in un piano hanno sempre UN punto a comune.*

spazio quale i sensi ce lo presentano. La prima delle due (cfr. n° 4-13), essendo completamente nuova, fu da me più ampiamente sviluppata, mentre invece assai meno mi sono fermato sulla seconda (n° 14), che già prima era stata seguita dal sig. Amodeo (Atti R. Accademia di Torino, vol. XXVI)—per quanto nella pregevole Nota di lui qualche punto restasse ancora da completare—. A questa seconda via Lei pure si è attenuto (\*). Infatti i suoi post. V e VI (tolte le due ultime condizioni del V) corrispondono *press'a poco* ai miei Va e VIa del n° 14. Ciò che io ho chiamato *ordine* non è precisamente ciò che Lei ora indica con questo stesso nome, ma qualcosa che si avvicinerebbe piuttosto alle Sue *disposizioni circolari*, o meglio al Suo *senso di disposizione circolare*, e perciò appunto nel *carattere proiettivo degli ordini naturali* potevano essere per me ed erano infatti ritenute implicite quelle *permuteazioni circolari*, sulle quali Lei è stato così dettagliatamente preciso (\*\*).

A Lei è però riuscito più avanti di sopprimere il mio postulato VIIa: «*Esiste un gruppo armonico formato da quattro elementi distinti*». E la ragione di questo mi sembra stare nell'aver Lei ammesso fin da principio col post. IV (e anche implicitamente, come Lei pure osserva, nelle due ultime condizioni del post. V) *che i punti della retta siano in numero infinito*. In ogni modo però vedo ora con piacere risolta la questione, che era per me allora rimasta insoluta (l. c. pag. 22), se cioè, aggiungendo alle condizioni precedenti questa degli infiniti punti sulla retta, si potesse sopprimere quel mio ultimo postulato. E vedo dunque che (in questo caso) si può effettivamente sopprimerlo.

Ma v'ha di più. Non è nemmeno necessario di ammettere che i punti della retta siano in numero infinito; basta ammettere che

(\*) È infatti la più semplice e la più naturale, per quanto la prima, quella delle *serie armoniche rientranti*, possa forse riuscire più interessante. Ma di queste *serie armoniche* non si potrebbe certo parlare p. es. in un corso elementare!

(\*\*) L'*ordine* era per me una specie di *anello* o *catena rientrante*, secondo la quale immaginavo disposti i punti di una retta, senza tuttavia accennare ad un particolare *primo elemento*. E il restare inalterato di un ordine così concepito, senza, ben inteso, che ogni punto rimanga fisso, conduce di necessità alle *permuteazioni circolari*.

siano in numero superiore a *tre*. Lei vedrà infatti senza difficoltà che sopra una retta contenente un numero di punti finito ma non inferiore a *quattro* il Suo post. VI non potrebbe in alcun modo sussistere. Come mai si potrebbero allora portare due o, peggio ancora, tre punti dati in altri assegnati ad arbitrio, e ciò con una semplice *permutazione circolare*, più, forse, un'inversione? (\*)—Nel solo caso di *tre* punti, le permutazioni cicliche colle loro inverse — *sei* in tutto — soddisfanno precisamente alle condizioni richieste da quel postulato.

Ammesso pertanto il Suo post. VI, e, per di più, l'esistenza di almeno quattro punti sulla retta, rimane come solo caso possibile quello degli infiniti punti, e si può applicare di nuovo tutto il Suo ragionamento. Certo che, volendo togliere *ab initio* l'ipotesi degli infiniti punti sulla retta, bisogna anche togliere le condizioni 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> del Suo post. V, nelle quali detta ipotesi è implicitamente contenuta. Ma di queste due condizioni (\*\*) si fa uso in un solo punto del Suo lavoro, nel quale anche (come Lei stesso ebbe a intravedere) un'osservazione semplicissima basta per farne a meno (\*\*\*)�

(\*) Le Sue *permutazioni circolari* si riducono in questo caso a quelle stesse permutazioni di un numero finito di elementi—qui *punti*—che di solito si indicano con questo nome. Le mie configurazioni—e prima fra queste il *piano di 13 punti*, di cui al n° 8—danno facili esempi di progettività che non conserverebbero gli ordini naturali secondo la data definizione.

(\*\*) E più specialmente della 4<sup>a</sup>; la 5<sup>a</sup> è quasi un complemento della 4<sup>a</sup>, ma compimento necessario per poter poi concludere che quest'ultima rimane verificata per tutti i diversi ordini *derivati* (con permutazioni circolari e inversioni).

(\*\*\*) Alludo alla dimostrazione del teorema, che due coppie armoniche devono sempre separarsi, e tanto meno quindi l'una di esse può esser costituita da elementi coincidenti, a meno che questi non coincidano tutti due in uno dei limiti comuni.—Basta infatti dimostrare che questa proprietà sussiste per *un* gruppo armonico, perchè da quest'unico caso essa seguirà per ogni altro. E appunto per questo è anche permesso di scegliere i punti *A*, *B*, *C* (cfr. p. 11 della Sua Nota) in modo particolare; e conviene precisamente scegliere *A* e *B* in modo che siano separati da *C* e da un quarto punto della retta *u*, supposto esistente. Questo quarto punto si proietterà allora da *F* sulla retta *a* in un punto che potremo assumere come *H*. E accertata così l'esistenza di questo punto *H* che con *F* separa la coppia *AE*, si può ripetere parola per parola tutto il Suo ragionamento, basato esclusivamente sopra successive proiezioni.

Mentre dunque il Suo lavoro completa effettivamente il mio (in certi punti), non sarà forse male l'osservare ancora che i postulati in esso veramente necessari si possono ridurre ai primi tre, alle prime tre condizioni del V, e al VI; più la condizione che la retta contenga almeno quattro punti. — D'altra parte anche i primi tre postulati del mio lavoro coincidono completamente con quelli del Suo; il IV dice che su ogni retta stanno più di due punti; il Va e il VIa corrispondono ai Suoi V e VI (nei quali tuttavia gli stessi concetti sono forse meglio precisati), e infine il VIIa dice che « *Esiste un gruppo armonico formato da quattro elementi distinti* ». Quest'ultimo postulato porta con sè, naturalmente, l'esistenza di un quarto punto sulla retta, ma dice anche di più; questo *di più* è ora provato essere già una conseguenza delle cose precedenti.... (\*) (\*\*) (\*\*\*)

Colognola ai Colli (Verona), settembre 1894.

G. FANO.

## II.

(Lettera del Dr. F. Enriques al Dr. G. Fano).

Leggo con piacere nella sua lettera le acute osservazioni suggeritele dalla mia Nota « *Sui fondamenti della Geometria Proiettiva* ». In quella Nota io (ispirandomi al concetto intuitivo sperimentale dello spazio) ho fondato la Geometria proiettiva sopra 6 postulati (\*\*\*\*)

(\*) E il piano di 7 punti, al quale a p. 21 del mio lav. cit. io ero ricorso come esempio per mostrare la necessità del post. VIIa, è anche il solo caso logicamente possibile di un gruppo armonico  $A B C C$  (dove  $A, B, C$  sono distinti).

(\*\*) Non ho bisogno di aggiungere che i postulati di cui qui ho discorso conducono soltanto a una *Geometria proiettiva lineare*, e a uno spazio (di punti razionali) che ancora non corrisponde del tutto a ciò che i sensi ci dicono (o a quello che noi crediamo ci dicano). L'ultimo passo che rimane da fare è quello appunto della *continuità* (§§ 9 e seg. del Suo lav.).

(\*\*\*) I postulati ivi menzionati sono 7, ma il IV che afferma l'esistenza di infiniti punti su una retta è incluso nel V (come ivi pure è osservato) ed ammesso provvisoriamente innanzi per semplicità.

(composti), il 6° dei quali (riguardante la continuità) non compare in quella che Ella chiama la Geometria dei punti razionali.

Ora Ella opportunamente osserva che l'esistenza di infiniti punti sulla retta segue dal mio post. VI (concernente l'esistenza sulla retta d'una disposizione circolare *naturale* avente carattere proiettivo) ammessa l'esistenza di almeno 4 punti sopra una retta, e quindi introdotta questa ipotesi si possono sopprimere le due ultime condizioni del mio post. V (\*) (le quali invero contengono anche qualcosa di più) e stabilire ugualmente che il quarto armonico  $D$  dopo tre punti  $A, B, C$  (sopra una retta) è distinto da essi ed insieme a  $C$  separa  $A, B$  (\*\*).

Ciò basta, secondo Lei, a svolgere tutta la Geometria proiettiva dei punti razionali, e sta bene: ma nel seguito (cioè nella Geometria proiettiva dove si considera la retta continua) quelle due condizioni (fondamento del concetto di segmento) debbono essere invocate. Ora (ed è su questo che mi permetto di richiamare la sua attenzione perchè in un certo senso completa la sua osservazione), dopo avere dimostrato quel teorema sulla separazione delle coppie armoniche si può anche dimostrare che per gli ordini naturali dei punti d'una retta vengono soddisfatte le due ultime condizioni del mio post. V.

Invero si consideri sopra una retta un ordine naturale ( $ABC$ ); l'esistenza d'un punto intermedio a  $B, C$  nel detto ordine, vien data dal fatto che il coniugato armonico di  $A$  rispetto a  $B, C$ , insieme ad  $A$  separa  $B, C$ . Parimente si deduce che non può esservi un punto (ad es.  $C$ ) ultimo nel detto ordine; basta considerare il quarto armonico dopo  $ABC$  che segue  $C$  in ( $ABC$ ).

Con questo siamo d'accordo nel ritenere stabilito che tutta la Geometria proiettiva può fondarsi sui primi 3 postulati della mia Nota, sulla ipotesi che sopra una retta vi sieno più di 3 punti, e sui

(\*) Queste condizioni enunciate per gli ordini naturali d'una retta dicono:  
In un ordine naturale sopra una (certa) retta, tra due punti ve n'è sempre uno (e quindi infiniti) intermedio.

Questo ordine naturale non possiede un ultimo elemento.

(\*\*) Con una lieve modifica del ragionamento a pag. 11 della mia Nota,

post. V, VI, VII, della detta Nota, omesse le due ultime condizioni del V le quali *in base alla detta ipotesi* ed al post. VI *possono dimostrarsi*.

Questa è certo, dal punto di vista scientifico, una semplificazione, la quale per altro non sarebbe forse opportuna ove (come nella mia Nota) si volesse tener conto anche delle esigenze didattiche, e seguire la via indicata dall'intuizione sperimentale....

Castiglione dei Pepoli (Bologna), settembre 1894.

F. ENRIQUES.

### III.

(Lettera del Dr. G. Fano al Dr. F. Enriques).

A complemento della mia lettera dello scorso Settembre potrei aggiungere un'altra osservazione, che al momento non mi si era presentata, e che ora si collega anzi con quanto è detto nella Sua Risposta.

Se fra due punti *A* e *B* di una retta *a* non esistesse che un numero finito *n* ( $\geq 0$ ) di punti *intermedi* (riferita quest'espressione a uno dei due sensi di disposizione *naturale*), è chiaro che una progettività qualsiasi su *a*, nella quale ad *A* e *B* corrispondessero due punti *A'* e *B'* con un numero qualunque diverso da *n* di punti intermedi (nell'uno e nell'altro senso di disposizione naturale), sarebbe in contraddizione col post. VI della Sua Nota. E siccome una progettività così fatta si può sempre costruire (se la retta contiene più di tre punti) così possiamo anche concludere subito che (in questa stessa ipotesi) *non solo l'intiera retta deve contenere infiniti punti, ma infiniti devono pure esservene in ogni segmento* (definito il segmento nella disposizione circolare naturale, che ha carattere proiettivo).

Anche le condizioni 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> del Suo post. V, *in quanto si riferiscono agli ordini naturali caratterizzati dal post. VI*, seguono dunque immediatamente da questo stesso post. (ammessa l'esistenza di almeno quattro punti sulla retta); e siccome è in questo caso soltanto che

SUI POSTULATI FONDAMENTALI DELLA GEOMETRIA PROGETTIVA. 85

la prima di esse occorre più avanti, per dimostrare la separazione delle coppie armoniche, mi sembra così rimediato anche all'inconveniente didattico, che giustamente Ella aveva scorto nella semplificazione propostale....

Colognola ai Colli (Verona), 3 ottobre 1894.

G. F A N O.

---

## CONCERNING TRIPLE SYSTEMS;

by E. Hastings Moore, of Chicago.

Adunanza dell' 11 novembre 1894.

Mr. Netto in his article « *Zur Theorie der Tripelsysteme* » (Mathematische Annalen, v. 42, pp. 143-152, 1893) raised the questions as to the existence and the number of distinct classes of triple systems in  $n$  elements, where  $n$  has (necessarily) the form  $n = 6m + 1$  or  $6m + 3$ .

I took up the questions in an article « *Concerning Triple Systems* » (Mathematische Annalen, v. 43, pp. 271-285, 1893), and was able to construct for every  $n > 13$  of the proper form (*at least*) two distinct triple systems.

Mr. Jan de Vries in his paper « *Zur Theorie der Tripelsysteme* » (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, v. 8, pp. 222-226, 1894) exhibits a triple system in  $n = 13$  elements distinct from the one given by Mr. Netto.

Thus we see that for  $n = 3, 7, 9$  respectively there is but one class of triple systems in  $n$  elements, and for every  $n \geq 13$  of the form  $6m + 1$  or  $6m + 3$  we are in possession of at least two classes, while the extreme flexibility of my method of construction (although it is not exhaustive) would seem to justify the conjecture that the number of classes increases rapidly with  $n$ .

The University of Chicago  
October 22, 1894.

E. HASTINGS MOORE.

**SULL'EQUILIBRIO DELLE SUPERFICIE  
FLESSIBILI E INESTENDIBILI;**

Nota di **G. Penna ochietti**, in Catania.

---

Adunanza del 23 dicembre 1894.

---

Dopo la classica memoria del Beltrami *Sull'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili* (\*) si pubblicarono pregevolissimi lavori sullo stesso soggetto (\*\*), intorno al quale mi limito a fare in questa breve Nota qualche osservazione sul modo di dedurre le equazioni differenziali, indicando in ultimo un nuovo notevole caso di equilibrio.

I. Sopra una superficie, che supponiamo perfettamente flessibile e inestendibile, sia tracciato un sistema di coordinate curvilinee  $u, v$  e sieno  $x, y, z$  le coordinate di un punto  $M$  della superficie rispetto

---

(\*) Mem. R. Accad. delle Scienze di Bologna, serie IV, t. III, anno 1881,  
pag. 217-265.

(\*\*) G. Morera, Rend. Accad. Lincei, 1883.

V. Volterra, ivi, 1884, note due.

G. A. Maggi, Rend. Ist. Lomb. serie II, vol. XVII, 1884.

E. Padova, Rend. Accad. Lincei 1885.

G. Picciati, Sull'equilibrio e sul moto infinitesimo delle superficie flessibili ed inestendibili. (Giorn. di Matem. del prof. G. Battaglini, 1892).

a un sistema di tre assi ortogonali fissi nello spazio. Consideriamo il parallelogramma elementare  $ds$ , di cui sieno  $ds_u$ ,  $ds_v$  i lati uscenti dal punto  $M$  e nei quali variano la sola  $u$  e la sola  $v$  rispettivamente. Poniamo :

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2.$$

Se  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sono le componenti di una forza secondo gli assi  $U$ ,  $V$ ,  $W$  le componenti della forza stessa secondo le linee coordinate  $u$ ,  $v$  e secondo la normale alla superficie e se questa normale forma cogli assi angoli i cui coseni sono  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , si ha :

$$X = U \sqrt{E} \frac{\partial x}{\partial u} + V \sqrt{G} \frac{\partial x}{\partial v} + \alpha W,$$

$$Y = U \sqrt{E} \frac{\partial y}{\partial u} + V \sqrt{G} \frac{\partial y}{\partial v} + \beta W,$$

$$Z = U \sqrt{E} \frac{\partial z}{\partial u} + V \sqrt{G} \frac{\partial z}{\partial v} + \gamma W.$$

Sui lati  $ds_u$ ,  $ds_v$  del parallelogramma si esercitano dalla rimanente superficie tensioni dirette nel piano tangente e le cui componenti denoteremo con  $-T_{uu}$ ,  $-T_{vv}$  secondo le linee coordinate  $u$  e con  $-T_{uv}$ ,  $-T_{vu}$  secondo le linee  $v$ . In virtù delle ultime tre equazioni le componenti, secondo l'asse delle  $x$ , delle tensioni che si esercitano sui lati  $ds_u$ ,  $ds_v$  del parallelogramma, sono rispettivamente :

$$-\left( T_{uu} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{vv} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du,$$

$$-\left( T_{vv} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{vu} \frac{\partial x}{\partial v} \right) dv.$$

Le componenti analoghe per i rimanenti due lati, opposti rispettivamente a  $ds_u$ ,  $ds_v$ , sono:

$$\left( T_{uu} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{vv} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du + \frac{\partial}{\partial v} \left( T_{uu} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{vv} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du dv,$$

$$\left( T_{vv} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{uu} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du + \frac{\partial}{\partial u} \left( T_{vv} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + T_{uu} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du dv.$$

Analoghe sono le componenti delle stesse tensioni rispetto agli altri due assi. Tutte queste tensioni fanno equilibrio alla forza esterna che si esercita sull'elemento  $d\sigma$  e le cui componenti diremo  $Xd\sigma$ ,  $Yd\sigma$ ,  $Zd\sigma$ . Esprimendo che sono nulle le somme delle componenti di queste tensioni e della forza esterna, secondo gli assi, dividendo per  $du dv$  e ponendo  $H = \sqrt{EG - F^2}$ , si ha:

$$HX = \frac{\partial}{\partial u} \left( -T_{vv} \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial x}{\partial u} - T_{uu} \frac{\partial x}{\partial v} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v} \left( -T_{uu} \frac{\partial x}{\partial u} - T_{vv} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

con due equazioni analoghe.

Si può immaginare che per centro del parallelogramma  $d\sigma$  passino le direzioni della forza esterna e delle componenti, secondo le linee coordinate, delle tensioni sui lati del parallelogramma, sicchè esprimendo che è nulla la somma algebrica dei momenti, rispetto al centro del parallelogramma, della forza esterna e delle tensioni per le quali è in equilibrio il parallelogramma stesso, si trova la relazione:

$$T_{uu} = T_{vv}.$$

Ponendo

$$\lambda = -T_{vv} \sqrt{\frac{G}{E}}, \quad \mu = -T_{uu} = -T_{vv}, \quad \nu = -T_{vv} \sqrt{\frac{E}{G}},$$

si ottengono così le equazioni indefinite dell'equilibrio :

$$\left. \begin{aligned} HX &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \mu \frac{\partial x}{\partial u} + \nu \frac{\partial x}{\partial v} \right), \\ HY &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \lambda \frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \mu \frac{\partial y}{\partial u} + \nu \frac{\partial y}{\partial v} \right), \\ HZ &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \lambda \frac{\partial z}{\partial u} + \mu \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \mu \frac{\partial z}{\partial u} + \nu \frac{\partial z}{\partial v} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

le quali sono conformi alle equazioni del Beltrami.

Se  $X, ds$ ,  $Y, ds$ ,  $Z, ds$  sono le componenti, secondo gli assi, della forza che agisce sopra un elemento  $ds$  del contorno, si dovrà avere, per l'equilibrio, anche la condizione :

$$\int_I X, ds + \int_\sigma X d\sigma = 0.$$

Se per  $X$  si sostituisce il suo valore fornito dalla prima delle (1) e se si osserva che si ha :

$$\int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{1}{H} d\sigma = \int_I \varphi \frac{d v}{d s} ds,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{1}{H} d\sigma = - \int_I \varphi \frac{d u}{d s} ds,$$

si deduce :

$$\int_I \left[ \left( \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v} \right) \frac{d v}{d s} - \left( \mu \frac{\partial x}{\partial u} + \nu \frac{\partial x}{\partial v} \right) \frac{d u}{d s} + X, \right] ds = 0.$$

Osservando che quest'equazione e le due analoghe che si potrebbero egualmente dedurre, sono verificate per qualsiasi contorno,

anche piccolissimo, si ottengono le tre equazioni ai limiti :

$$\left. \begin{aligned} X_t &= -\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}\right) \frac{dv}{ds} + \left(\mu \frac{\partial x}{\partial u} + \nu \frac{\partial x}{\partial v}\right) \frac{du}{ds}, \\ Y_t &= -\left(\lambda \frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial v}\right) \frac{dv}{ds} + \left(\mu \frac{\partial y}{\partial u} + \nu \frac{\partial y}{\partial v}\right) \frac{du}{ds}, \\ Z_t &= -\left(\lambda \frac{\partial z}{\partial u} + \mu \frac{\partial z}{\partial v}\right) \frac{dv}{ds} + \left(\mu \frac{\partial z}{\partial u} + \nu \frac{\partial z}{\partial v}\right) \frac{du}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Se le (1) si moltiplicano ordinatamente dapprima per  $\frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial u}$ , poi per  $\frac{\partial x}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , infine per i coseni  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  degli angoli che la normale alla superficie forma cogli assi e se ciascuna volta si sommano i risultati e si pone :

$$Q_1 = X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u}, \quad Q_2 = X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v},$$

si avranno le equazioni indefinite dell'equilibrio nella forma :

$$H Q_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \lambda + \frac{\partial E}{\partial v} \mu + \left( \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) \nu +$$

$$+ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) E + \left( \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v} \right) F,$$

$$H Q_2 = - \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) \lambda + \frac{\partial G}{\partial u} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \nu +$$

$$+ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) F + \left( \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v} \right) G,$$

$$H(X\alpha + Y\beta + Z\gamma) = A\lambda + 2B\mu + C\nu,$$

dove si è posto per brevità :

$$A = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \beta + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \gamma,$$

$$B = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \beta + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \gamma,$$

$$C = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \beta + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \gamma.$$

Se  $U, V, W$  sono le componenti della forza  $X, Y, Z$  secondo le linee coordinate  $u, v$  e secondo la normale alla superficie, si ha :

$$U = \frac{V\bar{E}}{H^2} (G Q_1 - F Q_2), \quad V = \frac{V\bar{G}}{H^2} (-F Q_1 + E Q_2),$$

$$W = X \alpha + Y \beta + Z \gamma.$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio divengono perciò :

$$\left. \begin{aligned} HU &= V\bar{E} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v} + E_1 \lambda + 2F_1 \mu + G_1 v \right), \\ HV &= V\bar{G} \left( \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v} + E_2 \lambda + 2F_2 \mu + G_2 v \right), \\ HW &= A \lambda + 2B \mu + C v, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dove :

$$E_1 = \frac{1}{H^2} \left[ \frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial u} - F \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) \right],$$

$$F_1 = \frac{1}{2H^2} \left( G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u} \right),$$

$$G_1 = \frac{1}{H^2} \left[ G \left( \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial v} \right],$$

$$E_2 = \frac{1}{H^2} \left[ -\frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial u} + E \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) \right],$$

$$F_2 = \frac{1}{2H^2} \left( -F \frac{\partial E}{\partial v} + E \frac{\partial G}{\partial u} \right),$$

$$G_2 = \frac{1}{H^2} \left[ -F \left( \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial v} \right],$$

come si dedurrebbe anche dalla memoria del Beltrami.

Si riconosce poi immediatamente che le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio in coordinate curvilinee si deducono dalle note equazioni differenziali :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u'} - \frac{\partial T}{\partial u} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v'} - \frac{\partial T}{\partial v} = Q_2,$$

del moto di un punto di massa eguale all'unità sopra la superficie data e sotto l'azione delle forze date  $X, Y, Z$ , col solo cambiare in queste ultime equazioni :

$$u^2, \quad u'v', \quad v^2, \quad u'', \quad v''$$

rispettivamente in

$$\frac{1}{H} \lambda, \quad \frac{1}{H} \mu, \quad \frac{1}{H} v, \quad \frac{1}{H} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \right), \quad \frac{1}{H} \left( \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial v} \right).$$

Similmente moltiplichiamo le equazioni (2) rispettivamente per  $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$  e sommiamo; operiamo nello stesso modo coi moltiplicatori  $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$  e coi moltiplicatori  $\alpha, \beta, \gamma$ : poniamo :

$$Q'_1 = X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u}, \quad Q'_2 = X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}$$

e osserviamo che si ha identicamente :

$$\frac{\partial x}{\partial u} \alpha + \frac{\partial y}{\partial u} \beta + \frac{\partial z}{\partial u} \gamma = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v} \alpha + \frac{\partial y}{\partial v} \beta + \frac{\partial z}{\partial v} \gamma = 0;$$

si avranno le equazioni ai limiti nella forma :

$$Q'_1 = E \left( -\lambda \frac{dv}{ds} + \mu \frac{du}{ds} \right) + F \left( -\mu \frac{dv}{ds} + \nu \frac{du}{ds} \right),$$

$$Q'_2 = F \left( -\lambda \frac{dv}{ds} + \mu \frac{du}{ds} \right) + G \left( -\mu \frac{dv}{ds} + \nu \frac{du}{ds} \right),$$

$$X_s \alpha + Y_s \beta + Z_s \gamma = 0.$$

Se la forza  $X_s, Y_s, Z_s$  si risolve in tre componenti  $U_s, V_s, W_s$ , secondo le linee coordinate  $u, v$  e secondo la normale alla superficie, si ha :

$$U_s = \sqrt{E} (G Q'_1 - F Q'_2), \quad V_s = \sqrt{G} (-F Q'_1 + E Q'_2),$$

$$W_s = X_s \alpha + Y_s \beta + Z_s \gamma.$$

Le equazioni ai limiti assumono così quest'altra forma data pure dal Beltrami.

$$U_s = \sqrt{E} \left( -\lambda \frac{dv}{ds} + \mu \frac{du}{ds} \right), \quad V_s = \sqrt{G} \left( -\mu \frac{dv}{ds} + \nu \frac{du}{ds} \right), \quad (4)$$

$$W_s = 0.$$

II. Ai casi notevoli di equilibrio dati dal Beltrami aggiungerò il seguente, il quale vale pure per una superficie qualunque e può essere direttamente verificato mediante le formule che precedono. S'immagini, com'è sempre possibile, sopra la superficie data un si-

stema di coordinate curvilinee isoterme e il quadrato dell'elemento lineare sia dato da :

$$ds^2 = E(d\mathbf{u}^2 + d\mathbf{v}^2).$$

La superficie stessa sarà in equilibrio sotto l'azione :

1° delle forze

$$U = \frac{k}{r_u}, \quad V = \frac{k}{r_v},$$

$$W = \frac{1}{E}(A\lambda + 2B\mu + Cv),$$

dove  $k$  è una costante qualunque,  $\frac{1}{r_u}$ ,  $\frac{1}{r_v}$  sono le curvature tangenziali o geodetiche delle linee coordinate  $u$ ,  $v$ , cioè :

$$\frac{1}{r_u} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{1}{r_v} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u}$$

e dove, indicando con  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $k_1$  nuove costanti qualunque, si ha :

$$\lambda = \frac{b_1}{E} + k_1, \quad \mu = \frac{b_2}{E} + \frac{k}{2}, \quad v = -\frac{b_1}{E} + k_1;$$

2° di forze al contorno determinate dalle formule generali (I, 4) e da quest'ultimi valori di  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $v$ .

Catania, 29 novembre 1894.

G. PENNACCHIETTI.

## SU DI UN TEOREMA FONDAMENTALE

RELATIVO AGLI ELEMENTI COMUNI DI DUE CONICHE IN UN PIANO.

**Nota di Eugenio Massaferrri, in Bologna.**

Attenuta dal 21 dicembre 1944.

Con la presente Nota mi sono proposto di colmare una lacuna che ho riscontrato nelle ordinarie trattazioni sintetiche del problema degli elementi comuni a due coniche di un piano. Come è noto lo svolgimento di tale problema (come in generale di tutti i problemi geometrici di 3° e 4° grado) si fonda sul teorema che « Due coniche (reali) di un piano aventi in comune un punto (reale), che non sia di contatto, hanno almeno un altro punto (reale) comune ». Di questo teorema (il quale corrisponde in sostanza all'esistenza di una radice reale di un'equazione di 3° grado) si suol dare nei trattati di geometria proiettiva (\*), seguendo il Chasles, una giustificazione intuitiva che non è affatto una dimostrazione rigorosa. D'altra parte non era da supporsi che per dimostrare tale proposizione fosse necessario introdurre qualche nuovo postulato, oltre al sistema di postulati atti a stabilire il teorema fondamentale dello Staudt, e ciò per la dimostrazione analitica della quistione (\*\*).

---

(\*) Vedi per es.: Sannia, *Geom. proiett.*, 2<sup>a</sup> ed., pag. 265.

(\*\*) È noto che dal teorema fondamentale dello Staudt si deduce la rappresentabilità dei punti dello spazio mediante coordinate proiettive.

Io ottengo appunto in questa Nota la dimostrazione della proposizione in parola fondandomi sui risultati stabiliti dal sig. F. Enriques in una sua Nota (\*) dove espone un sistema di postulati grafici conducenti al teorema fondamentale dello Staudt.

Risolvo ancora alcune altre quistioni (che hanno attinenza all'argomento trattato in questa Nota) sul modo di comportarsi, l'una rispetto all'altra, di due coniche del piano, avuto riguardo alle loro regioni di punti interni e di punti esterni, quistioni che venivano risolute finora con processi intuitivi.

1. Rimando alla Nota *Sui fondamenti della Geometria proiettiva* del sig. Enriques per i postulati, le definizioni, i teoremi che stabiliscono, rispetto alle forme fondamentali di 1<sup>a</sup> specie, la *disposizione circolare naturale* degli elementi (e corrispondentemente gli elementi susseguitisi, le coppie di elementi che si separano, i segmenti, ecc.), le *corrispondenze biunivoche ordinate* e le loro proprietà, e il *teorema fondamentale dello Staudt*.

Questi concetti e teoremi — avuto riguardo agli sviluppi ordinari della geometria proiettiva, e in particolare alla corrispondenza *prospettica* tra i punti di una conica e i raggi di un fascio di centro sulla conica, e alla proiettività tra coniche — si estendono senz'altro alle *forme di II<sup>o</sup> ordine del piano e della stella*, v-a-d la conica-luogo, la conica-inviluppo, il cono di II<sup>o</sup> ord. di raggi e il cono di II<sup>o</sup> ord. di piani (\*\*).

Allora il concetto di corrispondenza (biunivoca) ordinata si può considerarlo rispetto a due forme qualsivoglia delle 3 forme fondamentali di 1<sup>a</sup> specie e delle 4 forme di II<sup>o</sup> ord., come si fa in particolare per la proiettività.

2. Data nel piano una conica (reale)  $\gamma$ , se il punto  $U$  e la retta  $u$  sono polo e polare rispetto alla  $\gamma$ , si conviene di dire che

(\*) *Sui fondamenti della Geometria proiettiva*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo, s. II, v. XXVIII (1894).

(\*\*) E così ancora alla *forma di II<sup>o</sup> ordine dello spazio*, la schiera rigata: ma di essa non ci occupiamo qui.

$U$  è *interno* o *esterno* alla  $\gamma$ , e corrispondentemente che la  $u$  è *esterna* o *segna* la  $\gamma$ , se dochè sono ellittiche o iperboliche le due involuzioni (prospettive) ( $U$ ), ( $u$ ) di elementi reciproci rispetto alla  $\gamma$ , delle quali  $U$ ,  $u$  sono sostegno, — ovvero, ciò che è lo stesso, se dochè sono ellittiche o iperboliche le due involuzioni di punti e di tangenti della conica delle quali  $U$ ,  $u$  sono elementi di collinearità (\*).

Mi propongo di dimostrare le due proposizioni seguenti (di cui dovrò servirmi in seguito), delle quali si suol dare una dimostrazione basata sul concetto intuitivo del movimento continuo di un punto (o di una tangente) della conica (\*\*).

• Se  $u$  è una retta segante di  $\gamma$  « Se  $U$  è un punto esterno a una conica  $\gamma$ , e se  $M, N$  sono ad una conica  $\gamma$ , e se  $m, n$  sono i due punti di sezione con la  $\gamma$  delle tangenti alla  $\gamma$  che escono da  $U$ , — nella punteggieta ( $u$ ) uno  $U$ , — nel fascio ( $U$ ) uno dei due dei due segmenti complementari segmenti  $mn$  è tutto di rette se  $MN$  è costituito da tutti punti  $m$  ganti, e l'altro è tutto di rette interni (*segmento interno*) e l'altro esterne, le rette  $m, n$  escluse. — tro è costituito da tutti punti  $n$  Si dice che il primo dei due segmenti esterni (*segmento esterno*), i punti  $m$  o angoli  $mn$  di ( $U$ ) compresi esclusi. — « prende la conica  $\gamma$  ».

Pel teorema di destra, siano  $M, N$  i punti di contatto delle tangenti  $m, n$  uscenti da  $U$ ; la retta  $u \equiv MN$  è la polare di  $U$ . Sia  $L$  un terzo punto (oltre  $M, N$ ) della  $\gamma$ . Dico che ogni retta  $r$  di ( $U$ ) compresa nel segmento (o angolo)  $\lambda \equiv (mn)$  che contiene la retta  $UL$  è una segante della  $\gamma$ , mentre ogni retta del segmento complementare è esterna alla  $\gamma$ .

Infatti, detto  $H$  il punto ( $UL - MN$ ), si conduca per  $U$  una

(\*) L'equivalenza delle due definizioni deriva dalla proposizione che « Se  $O$  è un punto arbitrario della conica  $\gamma$ , l'involuzione  $I$  di punti della  $\gamma$ , prospettiva rispetto ad  $O$ , all'involuzione di punti reciproci ( $u$ ), ha per elementi di collinearità  $U, u$  ». Cfr. Staudt, Geom. di pos., n° 253.

(\*\*) Vedi ad es.: Sannia, *Geom. proiett.*, 1<sup>a</sup> ed., pag. 402. La dimostrazione che è nella 2<sup>a</sup> edizione dell'a *Geom. proiettiva* del Sannia a pag. 172-3 (n° 86, g) non ha senso, non so se per errori di stampa o per altro.

retta arbitraria  $r$  (diversa dalle  $m, n, UL$ ) e siano  $K, M_i, N_i$  i suoi punti d'incontro colle  $MN, LM, LN$ . Per un noto teorema (\*) i punti  $M_i, N_i$  sono tra loro reciproci rispetto alla  $\gamma$ , sicchè sulla  $r$  avremo l'involuzione di punti reciproci  $(r) \equiv (UK, M_i N_i)$ . Ora notando che il gruppo  $HKMN$  della  $(u)$  è prospettivo (rispetto al centro  $L$ ) al gruppo  $UKM_i N_i$  della  $(r)$ , avremo a seconda che in  $(U)$  il raggio  $r$  è esterno o interno all'angolo  $\lambda \equiv (mn)$  che contiene  $UHL$ , nella  $(u)$  la coppia  $HK$  separa ovvero non separa la coppia  $MN$ , nella  $(r)$  la coppia  $UK$  separa ovvero non separa la coppia  $M_i N_i$ , e quindi l'involuzione  $(r) \equiv (UK, M_i N_i)$  è ellittica ovvero iperbolica; ciò che è quanto si voleva dimostrare.

Correlativamente nel piano pel teorema di sinistra.

3. Si abbia una conica (reale)  $\gamma$ , e sia  $U$  un punto del suo piano, interno o esterno ad esso. Nel fascio  $(U)$  siano  $a, b$  due seganti della conica.

a) Dico che dei due angoli o segmenti complementari  $ab$  del fascio  $(U)$  ve n'è sempre uno  $\omega \equiv (ab)$  le cui rette sono tutte seganti della conica  $\gamma$ .

Invero, se  $U$  è esterno alla  $\gamma$  basta prendere il segmento  $ab$  di  $(U)$  che è contenuto nell'angolo  $\lambda \equiv (mn)$  formato dalle tangenti alla  $\gamma$  uscenti da  $U$  e che comprende detta conica ( $\S$  2). Se  $U$  è interno alla  $\gamma$ , ognuno dei due angoli complementari  $ab$  è nelle condizioni accennate, giacchè nel piano di una conica ogni retta che passa per un punto interno alla conica è una retta segante (\*\*).

Si consideri adunque nel fascio  $(U)$  l'angolo o segmento  $\omega \equiv (abb)$  le cui rette interne  $b$  sono tutte seganti della  $\gamma$ .

b) Dico che tali rette seganti  $b$  determinano nella conica  $\gamma$  delle coppie  $H, H'$  di punti sezione che formano due segmenti (o archi) della  $\gamma$ , i quali sono riferiti con corrispondenza ordinata ( $\S$  1) al segmento (o angolo)  $\omega \equiv (abb)$  di  $(U)$ , considerando come corri-

(\*) Staudt, Geom. di pos., n° 253.

(\*\*) Ciò si può derivare dal fatto che due involuzioni sulla conica, di cui una sia ellittica, hanno sempre una coppia (reale) comune.

*spondenti* la retta  $b$  e i due punti sezione  $H, H'$  di tale retta colla conica.

Considero il caso di  $U$  esterno (per  $U$  interno si procede analogamente). Le tre rette  $a, b, h$  di  $U$  segano la conica  $\gamma$  in tre coppie di punti  $AA', BB', HH'$  che sono coniugati in un'involuzione iperbolica (avente per centro di collineazione il punto  $U$ ); sicchè tali coppie non si separano sulla conica, e quindi, disponendo opportunamente gli accenti, avremo nella conica  $\gamma$  i sei punti susseguntisi  $AHBH'HA'$ . Voglio dimostrare che i due archi  $AHB, A'H'B'$  della  $\gamma$  sono riferiti (nel modo anzidetto) con corrispondenza ordinata al segmento  $\omega \equiv (ab)$  di  $(U)$ .

Sia  $K$  un qualunque punto dell'arco  $AHB$  della  $\gamma$ , tale, per es., che siano susseguntisi sulla  $\gamma$  i punti  $A, H, K, B$ . Se  $K'$  è il punto coniugato di  $K$ , anche i punti  $A', H', K', B'$  si susseguono sulla  $\gamma$ , — sicchè sulla  $\gamma$  si hanno i punti susseguntisi  $AHKBB'K'H'A'$ . Si dovrà dimostrare che nel fascio  $(U)$  si susseguono le rette  $a \equiv AA'$ ,  $b \equiv HH'$ ,  $k \equiv KK'$ ,  $b \equiv BB'$ .

Si noti perciò che siccome le due coppie di punti  $AK, HH'$  si separano sulla  $\gamma$ , il punto  $H_i \equiv (AK - HH')$  è interno alla  $\gamma$ , onde il segmento  $AH_iK$  della retta  $AK$  è interno alla  $\gamma$  (§ 2) e quindi l'angolo prospettivo  $U(AHK)$  di  $(U)$  risulta formato di rette seganti. Di tale angolo non fa parte la retta  $UB \equiv b$ , giacchè le coppie  $AK, BB'$  non si separano sulla  $\gamma$ , onde il punto  $B_i \equiv (AK - BB')$  risulta esterno alla  $\gamma$  e quindi anche al segmento  $AH_iK$ . —

Osservo infine che se il punto  $U$  è esterno alla conica  $\gamma$ , si può prendere in particolare per angolo  $\omega \equiv (ab)$  di  $(U)$  l'angolo delle due tangenti alla conica uscenti da  $U$ : allora  $A = A', B = B'$ , e i due archi considerati  $AB, A'B'$  divengono due archi complementari della conica.

#### 4. Mi propongo ora di dimostrare il

TEOREMA.—*Due coniche (reali)  $\gamma, \gamma'$ , situate in un piano, aventi in comune un punto (reale)  $A$ , che non sia un punto di contatto, hanno almeno un altro punto (reale) comune.*

La tangente in  $A$  alla  $\gamma$  incontri la  $\gamma'$  (oltre che in  $A$ ) in  $B$ , e la tangente in  $A$  alla  $\gamma'$  incontri la  $\gamma$  (oltre che in  $A$ ) in  $B'$ . Per

**B** si conduca la seconda tangente (oltre alla  $BA$ ) alla  $\gamma$ , e sia  $C$  il suo punto di contatto colla  $\gamma$ , e  $C'$  la sua ulteriore con la  $\gamma'$  (\*).

Chiamo  $\lambda$  l'angolo o segmento  $B(AC)$  del fascio ( $B$ ) che comprende la conica  $\gamma$  (§ 2).

Si consideri nel fascio ( $B$ ) un raggio  $r$  variabile nel segmento  $\lambda \equiv B(AC)$ : siano  $M, M_1$  i due punti d'incontro di  $r$  con la  $\gamma$ , ed  $M'$  il secondo punto d'incontro di  $r$  con la  $\gamma'$ . Si considerino le tre corrispondenze ordinate nelle quali al raggio  $r \equiv BM$  di  $\lambda$  corrispondono rispettivamente i punti  $M, M_1$  di  $\gamma$  e il punto  $M'$  di  $\gamma'$ : di esse le due prime intercedono tra l'angolo  $\lambda \equiv B(AC)$  e i due archi (o segmenti) complementari  $AC [AMC, AM_1C]$  di  $\gamma$  (§ 3, §); e la terza intercede tra il medesimo angolo  $\lambda \equiv B(AC)$  e l'arco  $AC' [AM'C']$  di  $\gamma'$  interno a  $\lambda$  [ed è precisamente una corrispondenza prospettica (§ 1)].

Ma i due archi complementari  $AC$  di  $\gamma$  si possono riferire con corrispondenza prospettica ai due segmenti complementari  $A(BC)$  del fascio ( $A$ ), e l'arco  $AC'$  (interno a  $\lambda$ ) di  $\gamma'$  si può riferire con corrispondenza prospettica ad uno determinato dei due segmenti complementari  $A(B'C')$  di ( $A$ ). Sicchè quest'ultimo segmento  $A(B'C')$  di ( $A$ ) risulterà così riferito con corrispondenza ordinata a ciascuno dei due segmenti  $A(BC)$  di ( $A$ ).

Indicherò per brevità con  $b, c, b', c'$  rispettivamente i raggi  $AB, AC, AB', AC'$ . Nel fascio ( $A$ ) adunque ad un segmento determinato  $b'c'$  sono riferiti con corrispondenza ordinata i due segmenti complementari  $bc$ , essendo  $b$  distinto da  $b'$ .

Bisogna distinguere due casi :

1° Il segmento  $b'c'$  in quistione è contenuto in uno dei due segmenti  $bc$ .—Allora se si considera quel segmento  $bc$  che contiene il segmento  $b'c'$ , la corrispondenza che tra loro intercede ammetterà almeno un raggio unito (\*\*) (diverso da  $b$  e da  $b'$ ).

(\*) Si noti che  $C$  non può appartenere alla  $AB$ , e  $C'$  non può appartenere alla  $AB'$ ; mentre  $C'$  può coincidere con  $B$ ,  $C$  con  $B'$ , o anche  $C$  con  $C'$ , ciò che non disturba i ragionamenti che seguono.

(\*\*) Vedi Enriques, loc. cit., § 10: TEOREMA. « Se in una forma di 1<sup>a</sup> specie è data una corrispondenza ordinata in cui ad un segmento  $AB$  corrisponda un segmento  $A'B'$  contenuto nel primo, esiste in questo segmento  $A'B'$  (e quindi

2° Nessuno dei due segmenti  $bc$  contiene il segmento  $b'c'$ .— Allora se si considera quello dei due segmenti  $bc$  che è riferito con corrispondenza discorda al segmento  $b'c'$ , la corrispondenza che tra loro intercede ammette almeno un raggio unito (\*) (diverso da  $b$  e da  $b'$ ).

Dunque in ogni caso esiste almeno un raggio  $r$  dell'angolo  $\lambda \equiv B(AC)$  (diverso da  $b \equiv BA$ ) che sega la  $\gamma'$  in un punto  $M'$  che coincide con uno dei punti  $M, M_i$  di sezione di detto raggio con la  $\gamma$ .

Con ciò il teorema risulta dimostrato.

5. A quanto è esposto nel precedente § aggiungo alcune considerazioni che ci danno un'idea precisa del modo reciproco di comportarsi delle due coniche  $\gamma, \gamma'$  in quistione.

Noto dapprima che i punti della  $\gamma'$  esterni [cioè situati in rette di  $(B)$  esterne] all'angolo  $\lambda \equiv B(AC)$  che comprende la  $\gamma$ , sono necessariamente esterni alla  $\gamma$ .

x) Considero le corrispondenze c'è ho stabilito nel fascio  $(A)$  tra il segmento  $b'c'$  e i due segmenti complementari  $bc$ . I raggi uniti delle due corrispondenze contengono ciascuno (oltre ad  $A$ ) un punto comune alle coniche  $\gamma, \gamma'$ , e viceversa per ogni punto (diverso da  $A$ ) comune alle  $\gamma, \gamma'$  passa raggio unito di una di tali corrispondenze. Il numero di questi raggi uniti è quindi il numero dei punti (reali) diversi da  $A$  comuni alle  $\gamma, \gamma'$ , il quale è  $\geq 1$  ( $\S 4$ ), dovrà essere  $\leq 3$ , altrimenti le due coniche  $\gamma, \gamma'$  sarebbero coincidenti.

Se immagino un raggio  $m'$  del fascio  $(A)$  che descriva il segmento  $b'c'$  da  $b'$  verso  $c'$ , ad esso corrispondono nelle due corrispondenze in quistione due raggi  $m, m_i$  di  $(A)$  che descrivono (in

---

« in  $AB$  » un elemento unito  $M$  siffatto che ad esso non precede alcun elemento unito nel segmento ordinato  $AB$ .—In questo teorema si considera veramente una corrispondenza data in tutta una forma di 1<sup>a</sup> specie, ma è sufficiente che la corrispondenza interceda tra i due segmenti considerati, come appare dalla dimostrazione.

(\*) Invero, è facile nel caso indicato determinare un segmento che è contenuto nel segmento corrispondente.

senso tra loro opposto) i due segmenti complementari ( $b c$ ). I raggi  $m, m_i$  segano la  $\gamma$  (oltre che in  $A$ ) in due punti  $M, M_i$ , e il raggio  $m'$  sega la  $\gamma'$  (oltre che in  $A$ ) in un punto  $M'$ , risultando i tre punti  $M, M_i, M'$  su di una medesima retta  $r$  del fascio ( $B$ ).

Dico che il punto  $M'$  di  $\gamma'$  risulta *interno* a  $\gamma$  solo quando il raggio  $m' \equiv AM'$  è esterno ai due angoli  $bm, bm_i$  percorsi dai due raggi mobili  $m, m_i$  prima di giungere alle posizioni  $m \equiv AM, m_i \equiv AM_i$ .

Invero, solo nel caso accennato il punto  $A'$  in cui la retta  $m' \equiv AM'$  sega ulteriormente la  $\gamma$  è un punto dell'arco  $MM_i$  di  $\gamma$  che non contiene  $A$ , v-a-d le due coppie di punti  $AA', MM_i$  si separano sulla  $\gamma$ , e quindi il punto  $M' \equiv (AA' - MM_i)$  risulta interno alla  $\gamma$ .

β) Nel segmento  $b'c'$  in quistione, procedendo da  $b'$  verso  $c'$  sia  $b$  il *primo* raggio che è unito in una qualsivoglia delle due corrispondenze considerate, e che contiene quindi (oltre ad  $A$ ) un punto  $H$  comune alle  $\gamma, \gamma'$  ( $b$  è distinto da  $b'$ , non escluso che sia  $b=c=c'$ , — e quindi  $H$  è distinto da  $A$ , non escluso che sia  $H=C=C'$ ). Dico che i raggi compresi tra  $b'$  e  $b$  contengono tutti dei punti della  $\gamma'$  *interni* alla  $\gamma$ , cioè l'arco  $AH$ , che non contiene  $B$  di  $\gamma'$  è formato (gli estremi esclusi) da tutti punti interni alla  $\gamma$ .

Per dimostrarlo basta far vedere che nel segmento  $b'h$  non v'è nessun raggio  $m'$  che sia interno ad uno dei due segmenti  $bm, bm_i$ , che corrispondono a  $b'm'$ . Si supponga per es. che  $m'$  sia interno a  $bm$ : in tal caso:

1°) o anche  $b'$  è interno a  $bm$ , — e allora o  $b'm'$  è interno a  $bm$ , o  $bm_i$  è interno a  $b'm'$ ,

2°) o  $b'$  è esterno a  $bm$ , — e allora  $b'm'$  o ha senso opposto a  $bm$  contenendo  $m$ , o ha senso opposto a  $bm_i$  contenendo  $b$ : sicchè per le proprietà delle corrispondenze ordinate esisterebbe sempre un elemento unito nel segmento  $b'm'$ , ciò che è contro l'ipotesi.

Analogamente, se nel segmento  $b'c'$  è  $k$  l'*ultimo* raggio unito e che contiene perciò (oltre ad  $A$ ) un punto  $K$  comune alle  $\gamma, \gamma'$  (non escluso che sia  $k=b$ , o anche  $k=c=c'$ , o le due cose insieme, — e quindi non escluso che sia  $K=H$ , o anche  $K=C=C'$ , o le due cose insieme), l'arco  $KA$ , che contiene  $B$ , della  $\gamma$  è for-

mato (gli estremi esclusi), da tutti punti *esterni* alla  $\gamma$ , come si dimostrerebbe con ragionamento simile al precedente.

Dunque « il punto  $A$  comune alle due coniche  $\gamma, \gamma'$  senza essere un punto di contatto, separa sulla conica  $\gamma'$  due archi adiacenti  $AH, KA$ , formati (escluso i punti estremi) l'uno di punti interni e l'altro di punti esterni alla conica  $\gamma$ , essendo  $H, K$  due punti comuni alle  $\gamma, \gamma'$  (non escluso  $H = K$ ) ».

Lo stesso si dica della conica  $\gamma$  rispetto alla conica  $\gamma'$ .

$\gamma)$  Esamino ora in breve le diverse ipotesi che si possono fare sul numero [ $\leq 1$  e  $\leq 3$ ] dei punti (reali e distinti) che le due coniche  $\gamma, \gamma'$  hanno in comune oltre al punto  $A$ , ottenendo così i diversi casi *possibili avuto riguardo alla teoria sviluppata*, i quali risultano appunto i casi che si verificano in realtà, come mostrerebbero ulteriori semplici considerazioni.

a) Se le due coniche  $\gamma, \gamma'$  ammettono (oltre ad  $A$ ) *un sol* punto (reale) comune  $H$ , in ciascuno di esse (per ciò che si è visto in  $\beta$ ) i due archi complementari  $AH$  sono l'uno di punti interni e l'altro di punti esterni all'altra conica. [I.e. le due coniche hanno in  $H$  o le tangenti distinte o un contatto tripunto].

b) Se le due coniche  $\gamma, \gamma'$  ammettono (oltre ad  $A$ ) *tre* punti comuni  $H, I, K$ , in tali punti le  $\gamma, \gamma'$  non possono avere contatto, giacchè altrimenti esse coinciderebbero, sicchè se procedendo in un determinato senso sulla conica  $\gamma'$  l'arco  $AH$  risulta di punti interni alla  $\gamma$ , l'arco  $HI$  risulterà di punti esterni,  $IK$  di punti interni e  $KA$  di punti esterni.

c) Infine se le  $\gamma, \gamma'$  ammettono (oltre ad  $A$ ) *due* punti comuni  $H, K$ , in uno almeno di questi, supponiamo per es. nel punto  $H$ , le due coniche non devono avere contatto, giacchè altrimenti esse coinciderebbero. Dico che nell'altro punto  $K$  le  $\gamma, \gamma'$  hanno necessariamente un contatto. Infatti, se procedendo in determinato senso sulla  $\gamma'$  l'arco  $KA$  è esterno alla  $\gamma$ , l'arco  $AH$  sarà interno, e l'arco  $HK$  sarà esterno (per quanto si è visto in  $\beta$ ). Sicchè i due archi adiacenti  $HK, KA$  della  $\gamma'$ , che sono separati dal punto  $K$  comune alle  $\gamma, \gamma'$ , sono entrambi esterni alla  $\gamma$ , ciò che esclude che in  $K$  le  $\gamma, \gamma'$  abbiano le tangenti distinte.

6. Esamino ancora alcune altre questioni sulla posizione reci-

proca di due coniche (reali) di un piano, rispetto alle loro regioni di punti interni e di punti esterni.

a) « Se si hanno in un piano due coniche (reali)  $\gamma$ ,  $\gamma'$ , ed  $A$  è un punto della  $\gamma$  esterno [o interno] alla  $\gamma'$ , esiste un arco  $MAN$  di  $\gamma$  tutto costituito di punti esterni [interni] alla  $\gamma'$  ».

Sia  $HAK$  un arco della  $\gamma$  contenente un punto  $A$  esterno alla  $\gamma'$ . Conduco per  $A$  due rette arbitrarie che seghino la  $\gamma'$  nelle due coppie di punti  $A_1 A'_1$ ,  $A_2 A''_2$ : queste due coppie non si separano sulla  $\gamma'$  per essere il punto  $A$  esterno alla  $\gamma'$ , e di più posso stabilire le designazioni dei quattro punti in modo che  $A_1 A'_1 A''_2 A_2$  si susseguano nella  $\gamma'$ .

Mediante i fasci  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  riferisco con corrispondenza ordinata l'arco  $HAK$  di  $\gamma$  ai due archi  $H'A'K'$ ,  $H''A''K''$  di  $\gamma'$  (§ 3, β), i quali risultano così riferiti con corrispondenza ordinata tra loro. I due archi corrispondenti  $A'K'$ ,  $A''K''$  di  $\gamma'$  o non hanno punti uniti, o hanno un primo punto unito (differente di  $A'$ ) procedendo da  $A'$  verso  $K'$ ; sicchè in ogni caso posso prendere in  $A'K'$  un punto  $N'$  tale che l'arco  $A'N'$  e l'arco corrispondente  $A''N''$  non abbiano punti uniti nella corrispondenza. Analogamente nell'arco  $H'A'$  potrò prendere un punto  $M'$  tale che i due archi corrispondenti  $M'A'$ ,  $M''A''$  non abbiano punti uniti. Ottengo così sulla  $\gamma'$  due archi  $M'A'N'$ ,  $M''A''N''$  riferiti con la corrispondenza ordinata che abbiamo stabilito, i quali non hanno elementi uniti. Di più potrò aver preso i punti  $M'$ ,  $N'$  in modo che  $M'$ ,  $N'$ ,  $M''$ ,  $N''$  si trovino tutti nell'arco  $A_1 A'_1 A''_2 A_2$ .

Dico che l'arco  $MAN$  di  $\gamma$  (che corrisponde ai due archi precedenti  $M'A'N'$ ,  $M''A''N''$  di  $\gamma'$ ) è tutto di punti esterni alla  $\gamma'$ .

Infatti, ad ogni punto  $P$  di  $MAN$  corrispondono in  $\gamma'$  due punti *distinti*  $P'$ ,  $P''$  che si trovano nello stesso arco  $A_1 A'_1 A''_2 A_2$ ; e di più in tale arco ordinato  $A_1 A'_1 A''_2 A_2$ ,  $P'$  precede  $P''$ , giacchè in caso contrario i due archi corrispondenti  $A'P'$ ,  $A''P''$  dovrebbero avere un punto unito, come si deduce facendo le diverse ipotesi possibili sulla posizione rispettiva dei quattro punti  $A'$ ,  $P'$ ,  $A''$ ,  $P''$  e applicando i teoremi sulle corrispondenze ordinate. Sicchè il punto  $P \equiv (A_1 P' - A_2 P'')$  è esterno alla  $\gamma'$ .

Analogamente si ragiona se il punto  $A$  di  $\gamma$  è interno alla  $\gamma'$ .

β) « Se si hanno in un piano due coniche (reali)  $\gamma$ ,  $\gamma'$ , ed esistono due punti  $A$ ,  $B$  di  $\gamma$  l'uno esterno, l'altro interno alla  $\gamma'$ , le due coniche hanno almeno due punti (reali) in comune, situati nei due archi complementari  $AB$  di  $\gamma$  ».

Invero, considerando uno qualsivoglia degli archi  $AB$  di  $\gamma$ , i punti di tale arco si possono dividere in due classi, l'una dei punti ai quali precedono nel segmento o arco ordinato  $AB$  solo punti esterni alla  $\gamma'$ , l'altra dei punti pei quali ciò non accade. Tali classi, pel postulato della continuità (\*), ammettono un punto di separazione  $H$ , che è un punto comune alle due coniche, non potendo essere (pel teorema α) né un punto esterno, né un punto interno alla  $\gamma'$ .

γ) « Di due coniche (reali)  $\gamma$ ,  $\gamma'$  di un piano aventi un contatto senza avere altri punti reali in comune, sempre una è esterna all'altra (\*\*) ».

Invero, si conduca pel punto di contatto  $A$  una retta che seghe le  $\gamma$ ,  $\gamma'$  nei punti  $B$ ,  $B'$  rispettivamente; almeno uno degli estremi  $B$ ,  $B'$  dei due segmenti  $AB$ ,  $AB'$  interni (§ 2) alle  $\gamma$ ,  $\gamma'$  è esterno all'altro segmento: se per es.  $B$  è esterno al segmento  $AB'$  (interno alla  $\gamma'$ ), tutti i punti di  $\gamma$  ( $A$  escluso) sono esterni a  $\gamma$ , giacchè se esistesse un punto  $C$  di  $\gamma$  interno a  $\gamma'$ , le  $\gamma$ ,  $\gamma'$  dovrebbero avere due punti (reali o distinti) in comune, ciò che è escluso.

Secondochè poi  $B'$  è esterno o interno al segmento  $AB$ , interno a  $\gamma$ , la  $\gamma'$  (come è facile dedurre) risulta esterna o interna alla  $\gamma$ .

δ) « Di due coniche (reali)  $\gamma$ ,  $\gamma'$  di un piano non aventi punti reali in comune, sempre una è esterna all'altra ».

Invero, se si conduce una segante comune, i due segmenti  $AB$ ,  $A'B'$  di tale retta interni alle  $\gamma$ ,  $\gamma'$  devono essere o 1º) l'uno esterno all'altro, o 2º) l'uno interno all'altro (cioè le due coppie  $AB$ ,  $A'B'$  non devono separarsi, giacchè altrimenti le due coniche avrebbero due punti in comune). E si deduce immediatamente che nel 1º caso

(\*) Vedi: Enriques, loc. cit., § 9.

(\*\*) Cioè tutti i punti di una conica sono esterni all'altra, il punto di contatto escluso.

le due coniche risultano esterne l'una all'altra; e nel 2°, se per es.  
il segmento  $A'B'$  interno alla  $\gamma'$  è contenuto nel segmento  $AB$  interno alla  $\gamma$ , la  $\gamma$  risulta esterna alla  $\gamma'$ , e la  $\gamma'$  interna alla  $\gamma$ .

Bologna, 10 dicembre 1894.

EUGENIO MACCAFERRI.

---

PRELIMINARI PER LO STUDIO DELLE FUNZIONI  
DI DUE VARIABILI;

Nota di G. Vivanti, in Pavia.

Adunanza del 13 gennaio 1895.

1. Una delle difficoltà che presenta lo studio delle funzioni di due variabili proviene dal fatto che, tentando di estendere a quell'ordinario metodo di rappresentazione geometrica delle quantità complesse, si è condotti a considerare come campo d'esistenza di funzioni uno spazio piano a 4 dimensioni.

È noto che Poincaré, nelle sue importantissime ricerche sugli integrali della forma  $\iint F(x, y) dx dy$  (\*), evitò questa difficoltà considerando, in luogo degli enti geometrici posti nello spazio a 4 dimensioni, le loro intersezioni con uno spazio a 3 dimensioni opportunamente scelto.

Non è tuttavia inutile vedere se, senza alcuno speciale artificio, possa ottersi nello spazio ordinario una rappresentazione *compatta* del campo di variabilità di due quantità complesse indipendenti quale si presti opportunamente allo studio delle funzioni di due variabili. Una tale rappresentazione si ha appunto, quando si fa corrispondere a ciascuna coppia di valori  $(x, y)$  delle due variabili una retta dello spazio. Intendendo allora *deposito* su ciascuna retta  $(x, y)$  il valore corrispondente della funzione  $f(x, y)$ , questa può

---

(\*) *Sur les résidus des intégrales doubles*, Acta math. t. IX, pp. 321-384.

considerarsi come una *funzione di linee*, in senso analogo a quello dato a tale denominazione da Volterra (\*).

Siccome però la geometria dello spazio rigato ci è assai meno familiare che non quella dello spazio punteggiato, così avviene che alcuni concetti fondamentali relativi alla *geometria infinitesimale* ed all'*analysis situs* dello spazio ordinario, i quali si appoggiano principalmente sull'intuizione geometrica, perdono tale carattere di intuitività nel trasformarsi nei concetti corrispondenti per lo spazio di rette. Tali fra gli altri i concetti di ente geometrico *aperto* o *chiuso*, di elemento *interno* od *esterno* ad un ente chiuso, di *intorno* d'un elemento, di *contorno*, etc. (\*\*). Importa pertanto darne anzitutto una definizione precisa. È questo l'oggetto principale della presente Nota, la quale contiene così i preliminari dello studio delle funzioni di due variabili complesse. E riservando tale studio ad altra occasione, ci limitiamo per ora ad accennare brevissimamente alla via da seguirsi per estendere a quelle funzioni i concetti fondamentali di Cauchy e di Riemann.

2. Se  $\xi, \eta, \zeta$  sono le coordinate correnti d'un punto dello spazio ordinario, noi intendiamo la coppia di valori complessi  $x = x_1 + ix_2$ ,  $y = y_1 + iy_2$  rappresentata dalla retta:

$$x_1\xi + x_2\zeta = 1, \quad y_1\eta + y_2\zeta = 1, \quad (1)$$

che diremo retta  $(x, y)$  (\*\*\*)

---

(\*) *Sopra le funzioni dipendenti da linee*, Rend. dell'Acc. dei Lincei, 1887, 2<sup>o</sup> sem., pp. 225-230, 274-281; *Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire*, Acta math., t. XII, pp. 233-286. — È però da notarsi che le linee considerate da Volterra sono chiuse e di forma qualunque.

(\*\*) Alla geometria infinitesimale dello spazio di rette si riferisce l'importante memoria di Koenigs: *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, Ann. de l'Éc. norm., 1882, pp. 219-338. Vedi anche la memoria dello stesso autore: *La géométrie réglée*, Ann. de la Fac. des sc. de Toulouse, t. III (1889) e VI (1892).

(\*\*\*) Se  $p_{ik}$  sono le coordinate omogenee della retta considerata, si ha:

$$\begin{aligned} p_{12} &= x_1 y_2, & p_{34} &= -x_2 + y_2, & p_{23} &= -x_2 y_1, & p_{14} &= -x_1, \\ p_{31} &= -x_1 y_2, & p_{24} &= y_1, \end{aligned}$$

e le equazioni (3) e (4) del n° 3 divengono:

$$(p_{12} - a_1 p_{24})^2 + (p_{23} + a_2 p_{14})^2 = \rho^2 p_{24}^2, \quad (p_{12} + b_1 p_{14})^2 + (p_{31} - b_2 p_{14})^2 = \sigma^2 p_{14}^2.$$

Ad ogni coppia di valori finiti e non nulli ( $x, y$ ) corrisponde una retta posta a distanza finita; alla coppia (0,  $y$ ) la retta all'infinito del piano  $y_1\eta + y_2\zeta = 1$ ; alla coppia ( $x, 0$ ) la retta all'infinito del piano  $x_1\xi + x_2\zeta = 1$ ; infine alla coppia (0, 0) qualunque retta del piano all'infinito dello spazio, o, come può dirsi, l'intero piano all'infinito. Per mantenere adunque anche in questo caso l'unicità della rappresentazione, converrà considerare il piano all'infinito come un unico elemento dello spazio rigato, allo stesso modo che nell'ordinaria rappresentazione dei numeri complessi l'insieme di tutti i punti all'infinito del piano si considera come un punto unico.

Resta ancora da vedere quali rette corrispondano a valori infiniti delle variabili. A questo proposito può dimostrarsi, che le rette le quali rappresentano coppie di valori ( $x, y$ ) non ambidue finiti sono tutte e soltanto quelle che tagliano a distanza finita uno almeno dei due assi  $\xi, \eta$ .

Poniamo :

$$x_1 = \frac{X_1}{X_3}, \quad x_2 = \frac{X_2}{X_3}, \quad y_1 = -\frac{Y_1}{Y_3}, \quad y_2 = -\frac{Y_2}{Y_3};$$

le (1) diverranno :

$$X_1\xi + X_2\zeta = X_3, \quad Y_1\eta + Y_2\zeta = Y_3. \quad (2)$$

Supponendo che le  $X, Y$  rimangano sempre finite, si avrà  $x = \infty$  per  $X_3 = 0$ , e  $y = \infty$  per  $Y_3 = 0$ . Ora, se  $X_3 = Y_3 = 0$ , le (2) rappresentano una retta passante per l'origine; se  $X_3 = 0$ , l'intersezione del piano  $Y_1\eta + Y_2\zeta = Y_3$  col piano  $X_1\xi + X_2\zeta = 0$  passante per l'asse  $\eta$ , quindi una retta che taglia l'asse  $\eta$ ; analogamente se  $Y_3 = 0$  una retta che taglia l'asse  $\xi$ . — Reciprocamente, se la retta (2) taglia l'asse  $\xi$  ad una distanza finita  $\bar{\xi}$  dall'origine, le sue equazioni dovranno essere soddisfatte per  $\xi = \bar{\xi}, \eta = \zeta = 0$ , donde segue  $Y_3 = 0$ ; analogamente si ha  $X_3 = 0$  se la retta (2) taglia l'asse  $\eta$ .

3. Dicesi *intorno*  $I_{ab}$  d'una retta ( $a, b$ ) l'insieme di tutte le rette

$(x, y)$  tali che :

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq \rho^2, \quad (y_1 - b_1)^2 + (y_2 - b_2)^2 \leq \sigma^2,$$

essendo  $\rho, \sigma$  due quantità finite ma arbitrariamente piccole. Il *conforo* di  $I_{ab}$  è costituito dall'insieme dei due complessi :

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = \rho^2, \quad (3)$$

$$(y_1 - b_1)^2 + (y_2 - b_2)^2 = \sigma^2. \quad (4)$$

Prendiamo a considerare p. es. il primo di questi due complessi.

Esso è costituito da tutte le rette poste negli  $\infty^1$  piani condotti normalmente al piano  $\xi\zeta$  per le rette dell'inviluppo rappresentato dall'equazione (3) giacente nel piano stesso. Tale inviluppo è una conica; infatti, eliminando  $x_1, x_2, \frac{dx_1}{dx_2}$  tra le :

$$x_1\xi + x_2\zeta - 1 = 0, \quad \xi dx_1 + \zeta dx_2 = 0,$$

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = \rho^2, \quad (x_1 - a_1)dx_1 + (x_2 - a_2)dx_2 = 0,$$

si ottiene :

$$(a_1\xi + a_2\zeta - 1)^2 - \rho^2(\xi^2 + \zeta^2) = 0. \quad (5)$$

Questa conica è la polare reciproca del cerchio :

$$(\xi - a_1)^2 + (\zeta - a_2)^2 = \rho^2$$

rispetto al cerchio :

$$\xi^2 + \zeta^2 = 1.$$

Essa ha un fuoco nell'origine; infatti per  $\xi \pm i\zeta = 0$  la (5) si riduce ad un quadrato perfetto, il che dimostra che ciascuna delle due rette immaginarie  $\xi \pm i\zeta = 0$  incontra la curva in due punti

coincidenti ossia le è tangente. La direttrice corrispondente è la retta:

$$a_1\xi + a_2\zeta - 1 = 0,$$

cioè la proiezione sul piano  $\xi\zeta$  della retta  $(a, b)$ . Dunque:

Le proiezioni sul piano  $\xi\zeta$  delle rette appartenenti all'intorno  $I_a$  della retta  $(a, b)$  sono tutte le rette le quali non tagliano una conica avente per uno dei fuochi l'origine e per direttrice corrispondente la proiezione della retta  $(a, b)$ .

Questa conica tende a confondersi colla proiezione della retta  $(a, b)$ , quando la costante  $\rho$  impicciolisce indefinitamente.

Considerazioni analoghe possono farsi per la proiezione sul piano  $\eta\zeta$ .

4. I due complessi (3), (4) hanno comune una congruenza, la quale ha la proprietà speciale che la sua proiezione su ciascuno dei due piani  $\xi\zeta$ ,  $\eta\zeta$  è costituita da un'infinità semplice di rette, cioè da un involuppo. Sono questi gl'involuppi di cui si è parlato nel numero precedente.

La congruenza considerata è del 4º ordine e della 4ª classe.

Il suo ordine risulta immediatamente dalla considerazione che le (1), (3), (4) danno per ogni sistema di valori  $\xi, \eta, \zeta$  tutt'al più 4 sistemi di valori reali  $x_1, x_2, y_1, y_2$ .

La classe d'una congruenza è il numero delle rette di essa contenute in un piano qualunque. Sia:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'equazione d'un piano; le condizioni perchè esso contenga la retta (1) sono:

$$Ay_1 + Bx_1 + Dx_1y_1 = 0, \quad Ax_2y_1 + Bx_1y_2 - Cx_1y_1 = 0,$$

dove si ha:

$$x_1 = \frac{-Ay_1}{B + Dy_1}, \quad x_2 = \frac{By_2 - Cy_1}{B + Dy_1}. \quad (6)$$

Introducendo questi valori nella (3), essa diviene un'equazione di 2° grado in  $y_1, y_2$ , che insieme alla (4) ci dà 4 coppie di valori  $y_1, y_2$ . A ciascuna di queste corrisponde per le (6) un'unica coppia di valori  $x_1, x_2$ . Dunque la congruenza è di 4<sup>a</sup> classe:

5. Data una retta  $P$  appartenente ad un complesso  $\pi$ , dicesi *intorno della retta P nel complesso  $\pi$*  l'insieme delle rette di  $\pi$  appartenenti all'intorno di  $P$ . Esso è limitato da due congruenze [le intersezioni di  $\pi$  coi complessi (3) e (4)], aventi comune una rigata, le cui proiezioni sono gli inviluppi del n° 3.

Si definisce analogamente *l'intorno d'una retta in una congruenza*.

6. Importa ora vedere come una congruenza possa decomporsi in una doppia infinità di elementi.

Supponiamo dapprima che la congruenza considerata si proietti, p. es., sul piano  $\xi\zeta$  in un inviluppo. Se  $P$  è una retta della congruenza,  $P_i$  la sua proiezione sul piano  $\xi\zeta$  e  $\bar{P}_i$  è quella retta (in generale unica) dell'inviluppo che si considera posta nell'intorno di  $P_i$  e facente con questa un angolo positivo arbitrariamente piccolo ma determinato  $d\omega$ , ogni retta della congruenza appartenente all'*elemento* che ha per *origine* la retta  $P$  dovrà soddisfare alla condizione che la sua proiezione sul piano  $\xi\zeta$  sia una retta dell'inviluppo posta fra  $P_i$  e  $\bar{P}_i$ . — Si ha, essendo  $\omega$  l'angolo di  $P_i$  coll'asse  $\xi$ :

$$\omega = -\operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}, \quad d\omega = -\frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

quindi, se si vuole che  $dx$  sia costante e per conseguenza lo sieno anche  $dx_1$  e  $dx_2$ , si dovrà prendere:

$$d\omega = \frac{n x_1 - m x_2}{x_1^2 + x_2^2} d\lambda,$$

dove  $m, n, d\lambda$  sono costanti, ossia indicando con  $R(u)$  la parte reale di  $u$  e ponendo  $n - im = q$ :

$$d\omega = R\left(\frac{q}{x}\right) d\lambda.$$

Se invece, come avviene in generale, la congruenza si proietta sul piano  $\xi\zeta$  in una doppia infinità di rette, detti  $A, B$  i punti d'incontro di  $P$ , cogli assi  $\xi, \zeta$ , si conduca per  $A$  una retta  $P'_1$  che faccia con  $P$  un angolo  $d\alpha$ , per  $B$  una retta  $P''_1$  che faccia con  $P$  un angolo  $d\beta$ . Sia  $D$  il punto d'incontro di  $P'_1$  coll'asse  $\zeta$ ,  $C$  quello di  $P''_1$  coll'asse  $\xi$ . Ogni retta della congruenza appartenente all'elemento che ha per origine la retta  $P$  dovrà soddisfare alla condizione che la sua proiezione sul piano  $\xi\zeta$  tagli l'asse  $\xi$  nel tratto  $AC$  e l'asse  $\zeta$  nel tratto  $AD$ . — Si ha:

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{x_1}{x_2}, \quad \operatorname{tg}(\omega + d\alpha) = -\frac{x_1}{x_2 + dx_2},$$

ossia mediante lo sviluppo di Taylor:

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \omega} = \frac{x_1 dx_2}{x_2^2},$$

da cui:

$$d\alpha = \frac{x_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Analogamente:

$$d\beta = \frac{x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Se si vuole che  $dx$  sia costante, si porrà:

$$d\alpha = R\left(\frac{1}{x}\right) m d\lambda, \quad d\beta = R\left(\frac{i}{x}\right) n d\lambda,$$

dove  $m, n, d\lambda$  sono costanti.

7. Se si ha una porzione  $\tau$  di una superficie  $\sigma$ , si può definire geometricamente il contorno di  $\tau$  come segue. Sia  $P$  un punto qualunque di  $\tau$  (\*),  $\pi$  il piano tangente alla superficie in  $P$ , e si ima-

---

(\*) È quasi inutile avvertire che qui si fa astrazione dai punti singolari della superficie che del contorno.

gini descritta in questo piano una circonferenza di raggio piccolissimo  $\rho$  avente il centro in  $P$ . Se gli estremi di tutti i raggi di questa circonferenza, per  $\lim \rho = 0$ , giacciono in  $\tau$ , si dice che  $P$  è un punto interno di  $\tau$ ; nel caso contrario, si dice che  $P$  appartiene al contorno di  $\tau$ .

In modo analogo può definirsi il *contorno* d'una porzione  $\tau$  d'una congruenza  $\sigma$ . Sia  $P$  una retta di  $\tau$ , e si imaginino condotte per un punto di  $P$  tutte le semirette normali a  $P$ . Se  $T$  è una di queste e  $\rho$  è una quantità costante positiva ed arbitrariamente piccola, esiste in generale nell'intorno di  $P$  una ed una sola retta  $P_T$  della congruenza la cui minima distanza da  $P$  è  $\rho$  ed ha la stessa direzione e lo stesso senso di  $T$ . Se tutte le rette  $P_T$  appartengono a  $\tau$ ,  $P$  è una retta *interna*, nel caso contrario, essa fa parte del *contorno* di  $\tau$ .

Analiticamente, se :

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \quad \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

sono le equazioni della congruenza  $\sigma$ , una porzione  $\tau$  di essa sarà definita da una diseguaglianza :

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) \leq 0. \quad (7)$$

Il contorno di  $\tau$  sarà la *rigata* avente le equazioni :

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad F = 0.$$

Se  $P$  è una retta di questa rigata, le due rette di essa *contigue* a  $P$  separano le  $P_T$  interne a  $\tau$  da quelle che non appartengono a  $\tau$ , ossia che sono *esterne* a  $\tau$ .

8. Le cose dette testè per le congruenze possono estendersi immediatamente ai complessi.

Abbiasi un complesso  $s$  e una porzione  $t$  di esso. Sia  $P$  una retta di  $t$ , e si considerino tutti i piani paralleli alla  $P$  e distanti da essa di una quantità piccola a piacere  $\rho$ . Uno qualunque  $\pi$  di questi

piani avrà comune con  $s$  un involuppo. Se questo, per tutti i piani  $\pi$ , appartiene per intero a  $t$ ,  $P$  è una retta interna a  $t$ , in caso diverso essa fa parte del contorno di  $t$ .

Può darsi un'altra condizione, sufficiente ma non necessaria in tutti i casi, perchè una retta  $P$  appartenga al contorno di  $t$ . Poichè per ogni punto dello spazio passa in generale un'infinità semplice di rette d'un complesso, ciascun punto  $A$  della retta  $P$  sarà il vertice d'un cono  $k_A$  di rette del complesso, e tutti questi coni avranno al generatrice comune  $P$ . Consideriamo le generatrici  $P', P''$  del cono  $k_A$  contigue a  $P$  dalle due parti opposte. Se fra le generatrici  $P', P''$  di tutti i coni  $k_A$  ve n'hanno alcune non appartenenti a  $t$ , può assestarsi che  $P$  fa parte del contorno di  $t$ .

Analiticamente una porzione d'un complesso  $f = 0$  è definita da una diseguaglianza della forma (7), e il contorno di tale porzione è costituito dalla congruenza :

$$f = 0, \quad F = 0.$$

9. Una congruenza dicesi *connessa*, se prese comunque due rette di essa può passarsi con continuità da una all'altra mediante una rigata appartenente per intero alla congruenza. Analoga definizione può darsi per un complesso.

Una congruenza connessa, non avente contorno, e di cui nessuna retta taglia a distanza finita gli assi  $\xi, \eta$ , dicesi *chiusa*. — La stessa definizione vale per un complesso.

10. Un complesso connesso dicesi *semplicemente connesso*, se qualunque congruenza chiusa in esso contenuta lo divide in due *regioni*; cioè se, data una congruenza chiusa  $\sigma$ , possono assegnarsi due rette  $P, Q$  del complesso, tali che qualunque rigata del complesso la quale congiunga  $P$  con  $Q$  contenga almeno una retta della congruenza  $\sigma$ .

Un caso molto generale in cui una congruenza divide un complesso in due regioni è il seguente. Il complesso considerato  $k$ , di equazione  $f = 0$ , è chiuso, e la congruenza  $\sigma$  è la *rappresentazione completa* dell'equazione  $\varphi = 0$ , cioè è il luogo delle rette del com-

plesso per le quali  $\varphi = 0$ , essendo  $\varphi$  una funzione intera, razionale o trascendente, delle  $x_1, x_2, y_1, y_2$ . Allora avverrà in generale che per certe rette di  $k$ , il cui insieme designeremo con  $k'$ ,  $\varphi$  è negativo, per le altre, il cui insieme diremo  $k''$ , è positivo. Poichè  $\varphi$  rimane sempre finito nel complesso  $k$ , su qualunque rigata che congiunge una retta di  $k'$  con una di  $k''$  vi sarà almeno una retta per cui  $\varphi = 0$ , ossia almeno una retta della congruenza  $\sigma$ .

11. Un complesso chiuso  $s$  divide lo spazio rigato in due regioni. In altre parole, se un complesso  $s$  è chiuso, qualunque rigata chiusa che ha comune con esso una retta ne ha comune almeno un'altra.

Per giungere a questo risultato premettiamo un'osservazione.

Abbiansi due rigate  $p, p'$  di cui nessuna generatrice tagli gli assi  $\xi, \eta$  e stabiliscasi una corrispondenza continua ed ordinata tra le loro generatrici. Sieno  $P, P'$  due generatrici corrispondenti, e designiamo le loro minime distanze dagli assi  $\xi, \eta$  rispettivamente con  $\rho_p, \rho_{p'}; \sigma_p, \sigma_{p'}$ . Prendasi una serie continua di valori positivi  $\rho$  che vada da  $\rho_p$  a  $\rho_{p'}$ , ed un'altra analoga che vada da  $\sigma_p$  a  $\sigma_{p'}$ , e stabiliscasi una corrispondenza continua ed ordinata fra le due serie. Detta  $(\rho, \sigma)$  una coppia di valori corrispondenti, per ognuna di tali coppie potremo scegliere una retta avente da  $\xi, \eta$  le minime distanze  $\rho, \sigma$ , e ciò in modo che l'insieme delle rette ottenute sia continuo. Un insieme analogo si può costruire per ciascuna coppia di generatrici corrispondenti delle due rigate  $p, p'$ . Ne segue che, date due rigate qualunque di cui nessuna generatrice tagli (a distanza finita) gli assi  $\xi, \eta$ , si può passare dall'una all'altra per moto continuo in guisa che nessuna generatrice in alcuna delle sue posizioni tagli i medesimi assi.

Il passaggio da una rigata ad un'altra, che può anche concepirsi come una *deformazione continua* di una di esse, presenta un notevole grado di arbitrarietà. Si vede però che il passaggio da una posizione ad una infinitamente vicina (*deformazione infinitesima*) può sempre imaginarsi avvenuto come segue. Per le varie rette  $P$  della rigata si facciano passare dei complessi  $k_p$  non contenenti la rigata stessa, e tali che, se  $P, P'$  sono due punti vicinissimi,  $k_p, k_{p'}$  dif-

feriscano di pochissimo tra loro; e si supponga che la retta  $P$  si sposti mantenendosi nel complesso  $k_p$  (\*) e descrivendo una sviluppativa.

Dopo ciò sia dato il complesso chiuso  $s$ , e sia  $P$  una retta qualunque di esso. Per  $P$  e per un'altra retta  $Q$  di  $s$  si faccia passare una rigata chiusa  $m$ ; se  $n$  è un'altra rigata chiusa qualunque di cui  $P$  sia una generatrice, si potrà deformare  $m$  sino a portarla a coincidenza con  $n$  senza mai tagliare gli assi  $\xi$ ,  $\eta$ . Supponiamo che  $n$  abbia comune con  $s$  la sola retta  $P$ ; allora vi sarà una certa posizione  $m'$  della rigata variabile in cui essa avrà comune con  $s$  un'altra retta  $Q'$  oltre  $P$ , mentre una sua deformata  $m''$  di pochissimo differente da essa non avrà comune con  $s$  alcun'altra retta. Imaginiamo condotti per le rette di  $m'$  dei complessi non contenenti  $m'$ , e tali che i complessi  $s_i$ , condotti per le rette  $Q'_i$  prossime a  $Q'$  differiscano di pochissimo da  $s$ ; potremo supporre che nel passaggio da  $m'$  ad  $m''$  ciascuna retta  $Q'_i$  si mantenga nel complesso corrispondente  $s_i$ , e che le due posizioni successive di essa si intersechino. La  $Q'$  si sposterà rimanendo in un complesso  $\bar{s}$  contenente tutte le rette di  $s$  che sono nelle vicinanze di  $Q'$ , e la sua nuova posizione intersecherà la  $Q'$  stessa. Ne segue che, se questa nuova posizione non appartenesse ad  $s$ ,  $Q'$  farebbe parte necessariamente (n° 8) del contorno di  $s$ , ciò che è impossibile perché  $s$ , essendo chiuso, non ha contorno. Con ciò è dimostrato l'asserto.

Adunque un complesso chiuso divide lo spazio rigato in due regioni; se due rette non appartengono alla stessa regione, ogni rigata che le congiunge ha almeno una retta comune con  $s$ .

L'insieme delle rette che taglano uno almeno degli assi  $\xi$ ,  $\eta$  costituisce un complesso connesso; poichè esso non ha comune alcuna retta con  $s$ , esso rimane interamente in una delle due regioni in cui  $s$  divide lo spazio.

---

(\*) Infatti sia  $r$  la rigata che si considera,  $\bar{r}$  la sua deformata. Il passaggio da  $r$  ad  $\bar{r}$  potrà concepirsi avvenuto in due successive fasi: deformazione di  $r$  in  $\bar{r}$  per modo che una generatrice  $P$  di  $r$  si trasformi in una generatrice qualsiasi  $\bar{P}$  di  $\bar{r}$ ; e scorrimento di  $\bar{r}$  su sè stessa in modo che la  $\bar{P}$  vada a coincidere colla intersezione  $P_i$  di  $\bar{r}$  con  $k_p$ .

12. Abbiansi nello spazio punteggiato due curve chiuse  $a, b$ ; si può proporsi la questione se esse s'intrecciano o no. Perciò si faccia passare per  $a$  una superficie chiusa  $\sigma$  non contenente  $b$ ; essa taglierà la  $b$  in un insieme di punti  $I$ . Se, qualunque sia  $\sigma$ , i punti di  $I$  non giacciono in una sola delle due regioni in cui  $a$  divide  $\sigma$ , le due curve  $a, b$  s'intrecciano.

Abbiansi ora nello spazio rigato due congruenze chiuse  $\alpha, \beta$ . Per  $\alpha$  si faccia passare un complesso chiuso semplicemente connesso  $s$  non contenente  $\beta$ ; questa potrà avere in comune con  $s$ :

1. Una rigata.
2. Un numero finito di rette.
3. Nessuna retta.

Se, qualunque sia  $s$ , si verifica uno dei casi 1, 2, e se inoltre le rette comuni a  $\beta$  e ad  $s$  non giacciono tutte in una sola delle due regioni in cui  $s$  è diviso da  $\alpha$ , può dirsi che le congruenze  $\alpha, \beta$  s'intrecciano.

Ciò significa che non si può ridurre l'una di esse per deformazione continua ad un'unica retta senza venire a coincidenza con qualche retta dell'altra.

Parimenti si dice che una rigata ed una congruenza s'intrecciano, se, condotto per la congruenza un complesso chiuso qualsiasi  $s$ , la rigata ha con esso delle rette comuni le quali non giacciono in una sola delle due regioni in cui  $s$  è diviso dalla congruenza.

13. Se in un complesso  $s$  si hanno 3 congruenze  $\alpha, \beta, \gamma$  aventi comune una rigata connessa  $e$ , si possono portare a coincidenza per moto continuo le parti prossime ad  $e$  delle congruenze  $\alpha, \beta$  senza venire a coincidenza con alcuna retta della congruenza  $\gamma$ .

Ciascuna delle  $\alpha, \beta$  è divisa da  $e$  — per quanto almeno riguarda le parti prossime a questa — in due regioni  $\alpha', \alpha''; \beta', \beta''$ . La congruenza  $\gamma$  alla sua volta divide il complesso  $s$  in due regioni  $s', s''$ , in ciascuna delle quali giacerà una delle  $\alpha', \alpha''$ , ed una delle  $\beta', \beta''$ . Supposto p. es. che  $\alpha', \beta'$  giacciono in  $s'$ , e  $\alpha'', \beta''$  in  $s''$ , si potrà portare  $\alpha'$  a coincidere con  $\beta'$  ed  $\alpha''$  con  $\beta''$  senza oltrepassare alcun elemento di  $\gamma$ .

14. L'applicazione dei concetti esposti allo studio delle funzioni di due variabili formerà l'oggetto di ulteriori ricerche. Importa però far vedere sin d'ora con pochi cenni quale sia l'indirizzo che può seguirsi in tale studio.

Abbiasi una funzione di due variabili complesse definita da una relazione algebrica  $F(x, y, z) = 0$ . Le coppie di valori di  $x, y$  a cui corrispondono valori di  $z$  non tutti tra loro distinti si ottengono eliminando  $z$  tra le equazioni :

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Il risultato dell'eliminazione è della forma  $\varphi(x, y) = 0$ , ossia:

$$\psi(x_1, x_2, y_1, y_2) + i\chi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0;$$

esso equivale alle due equazioni reali :

$$\psi = 0, \quad \chi = 0,$$

le quali nello spazio rigato sono rappresentate da una congruenza, la *congruenza di diramazione*  $\delta$ .

Se, partendo da una retta  $P$ , si ritorna alla retta stessa percorrendo una rigata che non s'intrecci colla congruenza  $\delta$ , la funzione riprende il suo valore iniziale. Se invece la rigata s'intreccia colla congruenza  $\delta$ , la funzione prende in generale un valore diverso da quello che aveva in principio.

Se  $\delta$  si scinde in più parti connesse, e se  $\bar{\delta}$  è una di queste, e inoltre è priva di singolarità, tutte le rigate che s'intrecciano con  $\bar{\delta}$  e con nessun'altra parte di  $\delta$  possono ridursi l'una all'altra per moto continuo senza venire a coincidenza con alcuna retta di  $\delta$ , e quindi sono fra loro equivalenti dal punto di vista delle permutazioni che introducono nei valori della funzione considerata.

15. Per trattarc un esempio semplicissimo, prendasi la funzione:

$$z = \sqrt{(x-a)(y-b)}.$$

La sua congruenza di diramazione è composta dei due piani:

$$a_1 \xi + a_2 \zeta = 1, \quad b_1 \eta + b_2 \zeta = 1.$$

Se supponiamo  $a$  reale la prima di queste equazioni diviene:

$$a_1 \xi = 1.$$

Prendiamo una rigata piccola a piacere, che giaccia in prossimità del primo di questi piani e che s'intrecci col medesimo. Tale sarebbe per esempio un iperboloido di rotazione ad una falda avente per asse una retta  $\xi = \frac{1}{a_1}$ ,  $\eta = c$  (che si suppone positivo), avente la linea di gola, di raggio arbitrariamente piccolo  $\rho$ , sul piano  $\xi \eta$ , e la cui generatrice abbia sul piano stesso un'inclinazione  $\alpha$  molto prossima a  $90^\circ$ . La generatrice di questo iperboloido la cui proiezione orizzontale fa coll'asse  $\xi$  un angolo  $\omega$  ha le equazioni:

$$\frac{\frac{1}{a_1} - \xi}{\frac{1}{a_1} + \rho \sin \omega} - \frac{\sigma \cos \omega}{\frac{1}{a_1} + \rho \sin \omega} \zeta = 1$$

$$\frac{c - \rho \cos \omega}{c - \rho \cos \omega} \eta + \frac{\sigma \sin \omega}{c - \rho \cos \omega} \zeta = 1,$$

dove  $\sigma = \frac{1}{\tan \alpha}$ , sicchè essa rappresenta la coppia di valori:

$$x = \frac{\frac{1}{a_1} - i \sigma \cos \omega}{\frac{1}{a_1} + \rho \sin \omega}, \quad y = \frac{i + i \sigma \sin \omega}{c - \rho \cos \omega}.$$

Il valore della funzione  $\zeta$  su questa retta è:

$$\begin{aligned} \zeta &= \sqrt{\frac{\frac{1}{a_1} - i \sigma \cos \omega}{\frac{1}{a_1} + \rho \sin \omega} - a_1} \sqrt{\frac{i + i \sigma \sin \omega}{c - \rho \cos \omega} - b_1 - i b_2} \\ &= \sqrt{\frac{-a_1 \rho \sin \omega - i \sigma \cos \omega}{\frac{1}{a_1} + \rho \sin \omega}} \sqrt{\frac{i + i \sigma \sin \omega}{c - \rho \cos \omega} - b_1 - i b_2}; \end{aligned}$$

prendendo l'angolo  $\alpha$  in modo che sia  $\sigma = -a_1 \rho$ , si ha:

$$\begin{aligned} \zeta &= \sqrt{\frac{i a_1^2 \rho (\cos \omega + i \sin \omega)}{1 + a_1 \rho \sin \omega}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{[1 - b_1(c - \rho \cos \omega)] + i[-b_1 c + \rho(b_1 \cos \omega - a_1 \sin \omega)]}{c - \rho \cos \omega}}. \end{aligned}$$

Se facciamo:

$$\frac{a_1 \rho}{1 + a_1 \rho \sin \omega} = p(\omega),$$

$$\sqrt{\frac{[1 - b_1(c - \rho \cos \omega)]^2 + [-b_1 c + \rho(b_1 \cos \omega - a_1 \sin \omega)]^2}{c - \rho \cos \omega}} = q(\omega),$$

$$\operatorname{arctg} \frac{-b_1 c + \rho(b_1 \cos \omega - a_1 \sin \omega)}{1 - b_1(c - \rho \cos \omega)} = \theta(\omega),$$

avremo:

$$\zeta(\omega) = \sqrt{p(\omega) e^{i(\omega + \frac{\pi}{2})}} \sqrt{q(\omega) e^{i\theta(\omega)}} = \sqrt{p(\omega) q(\omega)} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\omega + \theta(\omega)))},$$

dove  $p(\omega)$  e  $q(\omega)$  sono positivi purché  $a_1$  sia positivo e  $\rho$  sia abbastanza piccolo, e la radice s'intende presa in valore assoluto. Ora si ha:

$$p(2\pi) = p(0), \quad q(2\pi) = q(0), \quad \theta(2\pi) = \theta(0) + k\pi,$$

dove  $k$  è un numero intero positivo, nullo o negativo; ma, siccome può sempre prendersi  $\rho$  abbastanza piccolo perché  $\theta(\omega)$  per tutti i valori di  $\omega$  resti prossimo quanto si vuole ad  $\operatorname{arctg} \frac{-b_1 c}{1 - b_1(c - \rho \cos \omega)}$ , così sarà necessariamente  $k = 0$ , e per conseguenza:

$$\frac{\zeta(2\pi)}{\zeta(0)} = e^{\pi i} = -1.$$

Cioè la  $\zeta$  cambia di segno quando si sia percorso per intero l'iperboleoide considerato. Lo stesso avverrebbe per ogni rigata che

s'intrecciasse col secondo piano; mentre una rigata che s'intrecciasse con ambidue i piani lascerebbe la  $\zeta$  inalterata.

16. Se  $n$  è il grado rispetto a  $\zeta$  dell'equazione che la definisce come funzione di  $x, y$ , imaginando  $n$  spazi rigati coincidenti e congiungentisi fra loro in modo opportuno lungo la congruenza di diramazione, si potrà tentare di stabilire una teoria analoga a quella delle superficie di Riemann (\*).

17. Sia  $\zeta(x, y)$  una funzione continua e ad un sol valore; essa prenderà in generale ciascun valore per una doppia infinità, continua o formata di parti continue, di coppie di valori  $(x, y)$ , ossia, nella nostra rappresentazione, sopra una congruenza. La congruenza sulla quale  $\zeta$  diviene infinita dicesi *congruenza singolare*  $\sigma$ .

Sia ora  $\alpha$  una congruenza chiusa non avente alcuna retta comune con  $\sigma$ ; imaginando la  $\alpha$  decomposta in elementi (nº 6), si formi il prodotto del valore di  $\zeta$  su ciascuna retta di  $\alpha$  pel valore di  $dxdy$  relativo all'elemento avente quella retta per origine. La somma di tali prodotti si dice integrale doppio di  $\zeta$  esteso alla congruenza  $\alpha$ , e si denota con  $\iint_{\alpha} \zeta dxdy$  (\*\*).

È facile dimostrare:

Che, se la congruenza  $\alpha$  non s'intreccia colla  $\sigma$ , l'integrale esteso alla  $\alpha$  è nullo;

Che, se due congruenze chiuse  $\alpha, \beta$  s'intrecciano colla  $\sigma$  ma possono ridursi l'una all'altra per moto continuo senza venire a coincidenza con alcuna retta della  $\sigma$ , l'integrale esteso all'una od all'altra delle due congruenze ha uno stesso valore.

Dopo ciò abbiasi una congruenza chiusa  $\alpha$  che s'intrecci colla  $\sigma$ ; un complesso qualunque  $s$  contenente  $\alpha$  avrà in generale comune

(\*) Sulle funzioni algebriche di due variabili vedasi il lavoro di Picard: *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, Journ. de Math. s. IV, t. V, pp. 135-319.

(\*\*) Per brevità abbiamo fatto uso qui del linguaggio del metodo infinitesimale; non v'ha del resto alcuna difficoltà a ristabilire la forma esatta della definizione.

con  $\sigma$  una rigata  $r$  composta almeno di due parti situate nelle due regioni in cui  $s$  è diviso da  $\alpha$ .

Se in  $s$  si prende una congruenza chiusa  $\beta$  che scomponga  $r$  nello stesso modo in cui la scomponete la  $\alpha$ , gli integrali estesi ad  $\alpha$  e a  $\beta$  saranno uguali. Sia  $r'$  una delle due parti in cui è divisa  $r$ ; se per  $r'$  si fa passare un complesso  $t$  il quale non contenga alcun'altra retta di  $\sigma$  posta nelle vicinanze di  $r'$ , e se in questo complesso si prende una congruenza  $\gamma$  tale che i soli elementi di  $\sigma$  posti in una delle regioni in cui  $\gamma$  divide  $t$  sieno le rette della rigata  $r'$ , l'integrale esteso a  $\gamma$  sarà uguale all'integrale esteso a  $\beta$ , e quindi all'integrale esteso ad  $\alpha$ .

Per dimostrare ciò, basta far vedere che si può passare da  $\beta$  a  $\gamma$  per moto continuo senza venire a coincidenza con alcuna retta di  $\sigma$ ; ora la possibilità di tale passaggio risulta da quanto si è detto nel n° 13.

Così il calcolo dell'integrale esteso ad  $\alpha$  si riduce a quello dell'integrale esteso a  $\gamma$  (\*); resta da vedersi come debba scegliersi il complesso  $t$  per semplificare il più possibile l'integrazione. Prendiamo come complesso  $t$  l'insieme dei piani proiettanti le rette della rigata  $r'$  sul piano  $\xi\zeta$ ; la congruenza  $\gamma$  si comporrà di un'infinità semplice di involuppi posti rispettivamente in questi piani. E poichè su ciascuno di questi involuppi la  $x$  è costante, l'integrazione doppia verrà ridotta alla successione di due integrazioni semplici ( $\iint \zeta dx dy = \int d\xi \int \zeta dy$ ), di cui la prima si farà sommando per ciascun inviluppo i prodotti  $\zeta dy$  relativi alle sue rette, la seconda raccogliendo insieme i risultati così ottenuti per tutti gli inviluppi.

Mantova, 23 dicembre 1894.

G. VIVANTI.

---

(\*) Cfr. la Memoria citata di Poincaré. Sugli integrali doppi vedi anche: Poincaré, Comptes-Rendus, t. 102, pp. 202-204; Picard, ivi, pp. 349-350, 410-412.

# UN TEOREMA DI MECCANICA.

Nota di Pietro Burgatti, in Roma.

Adunanza dell'8 luglio 1894.

Nei Comptes Rendus del 6 marzo 1893 si legge il seguente teorema di Meccanica del sig. Staeckel comunicato all'Accademia dal sig. Darboux:

« Sieno  $q_1, q_2, \dots, q_n$  le variabili indipendenti che definiscono la posizione di un sistema di punti; poniamo

$$q'_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad q'_2 = \frac{dq_2}{dt}, \dots, \quad q'_n = \frac{dq_n}{dt}$$

e sia  $2T$  la forza viva definita da

$$2T = \sum_{k,\lambda} a_{k,\lambda} q'_k q'_\lambda. \quad (k, \lambda = 1, 2, \dots, n)$$

Sieno inoltre  $\varphi_{k,\lambda}(q_k)$  (per  $k, \lambda = 1, 2, \dots, n$ ),  $n^2$  funzioni indipendenti dal solo argomento indicato, e si rappresenti con  $\Phi$  il determinante formato con le dette funzioni; onde si avrà :

$$\Phi = \sum_{k,\lambda} \varphi_{k,\lambda} \Phi_{k,\lambda},$$

essendo  $\Phi_{k,\lambda}$  il complemento di  $\varphi_{k,\lambda}$ . Ciò posto, se

$$\sum_{k,\lambda} a_{k,\lambda} dq_k dq_\lambda$$

è riducibile alla forma

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Phi}{\Phi_{k,1}} dq_k^2,$$

allora, oltre l'integrale delle forze vive

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Phi}{\Phi_{k,1}} q_k'^2 = \alpha_1,$$

esistono altri  $n - 1$  integrali omogenei del 2º grado, cioè :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Phi \Phi_{k,\lambda}}{\Phi_{k,1}^2} q_k'^2 = \alpha_\lambda, \quad (\lambda = 2, 3, \dots n)$$

essendo nulla la funzione delle forze ».

Nella presente Nota mi propongo di dimostrare che il teorema ha ancora luogo quando esiste una funzione delle forze riducibile alla forma :

$$U_1 = \sum_{k=1}^n \frac{\Phi_{k,1}}{\Phi} f_k(q_k),$$

essendo  $f_1, f_2, \dots f_n$   $n$  funzioni affatto qualunque del solo argomento indicato. Gli  $n - 1$  integrali omogenei quadratici, da unire a quello delle forze vive, sono allora i seguenti :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Phi \Phi_{k,\lambda}}{\Phi_{k,1}^2} q_k'^2 = 2(U_\lambda + \alpha_\lambda), \quad (\lambda = 2, 3, \dots n)$$

nei quali

$$U_\lambda = \sum_{k=1}^n \frac{\Phi_{k,\lambda}}{\Phi} f_k(q_k).$$

Il teorema, come si vedrà, corrisponde al caso che l'equazione alle derivate parziali d'Hamilton sia integrabile colla separazione delle variabili; ha perciò qualche importanza solamente, quando si

voglia classificare un problema dinamico secondo la natura degli integrali primi che contiene.

Del teorema ho detto che dimostrazioni: la prima, basata sugli alcune identità che risultano dalla teoria del determinante, è molto semplice; la seconda ha minor semplicità ma è più generale e diretta.

Alcuni mesi dopo la compilazione di questi note seggi che anche il sig. Goettssen era giunto alla stessa generalizzazione (Comptes Rendus 9 maggio 1893). Queste note però esplicati gli integrali primi del problema.

1<sup>a</sup> Dimostrazione — Si consideri il determinante

$$(1) \quad \Phi = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \cdots & \varphi_{1n}, & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \cdots & & \varphi_{2n} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \cdots & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \varphi_{n-1,1} & \varphi_{n-1,2} & \cdots & & & \varphi_{n-1,n} \\ \varphi_{n,1} & \varphi_{n,2} & \cdots & & & \varphi_{n,n} \end{vmatrix}$$

composto di  $n^2$  funzioni, ciascuna delle quali contiene le variabili  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Per le note proprietà dei determinanti si hanno delle serie di relazioni come queste:

$$\varphi_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{11}} + \varphi_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{12}} + \cdots + \varphi_{1n} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{1n}} = \Phi$$

$$\varphi_{1n} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{1n}} + \varphi_{2n} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{2n}} + \cdots + \varphi_{nn} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{nn}} = 0,$$

che si possono anche scrivere:

$$\frac{\varphi_{11} \partial \Phi}{\Phi \partial \varphi_{11}} + \frac{\varphi_{12} \partial \Phi}{\Phi \partial \varphi_{12}} + \cdots + \frac{\varphi_{1n} \partial \Phi}{\Phi \partial \varphi_{1n}} = 1$$

$$\frac{\varphi_{1n} \partial \Phi}{\Phi \partial \varphi_{1n}} + \frac{\varphi_{2n} \partial \Phi}{\Phi \partial \varphi_{2n}} + \cdots + \frac{\varphi_{nn} \partial \Phi}{\Phi \partial \varphi_{nn}} = 0.$$

Dando ad  $s$  i valori  $1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n$  si ottiene una serie di  $n$  relazioni; se poi si attribuiscono ad  $r$  successivamente i valori  $1, 2, \dots, n$ , si ottengono  $n$  serie di relazioni come la precedente. Poniamo per brevità

$$(2) \quad \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{i,r}} = p_{i,r},$$

e fissiamo i ragionamenti sulla serie di relazioni controdistinta dall'indice  $r$ . Moltiplicando queste  $n$  relazioni rispettivamente per le costanti arbitrarie  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  e sommando si ottiene l'identità:

$$(3) \quad p_{1,r} \sum_{i=1}^n \varphi_{1,i} \alpha_i + p_{2,r} \sum_{i=1}^n \varphi_{2,i} \alpha_i + \dots + p_{n,r} \sum_{i=1}^n \varphi_{n,i} \alpha_i = \alpha_r.$$

Dando ad  $r$  successivamente i valori  $1, 2, \dots, n$  si ricavano dalla precedente  $n$  identità, che sono appunto quelle che servono alla dimostrazione del teorema proposto.

Supponiamo, infatti, che nel determinante (1) le  $\varphi$  della  $1^a$  linea sieno funzioni della sola  $q_1$ , quelle della  $2^a$  funzioni della sola  $q_2$ , ecc.; e dicendo  $\theta$  una funzione delle  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , poniamo:

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right)^2 = 2 \sum_{i=1}^n \varphi_{1,i} \alpha_i + 2f_1(q_1) \\ \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right)^2 = 2 \sum_{i=1}^n \varphi_{2,i} \alpha_i + 2f_2(q_2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_n} \right)^2 = 2 \sum_{i=1}^n \varphi_{n,i} \alpha_i + 2f_n(q_n) \end{array} \right.$$

dove le  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sono rispettivamente funzioni del solo argomento indicato, del resto qualunque. La funzione  $\theta$  è così determi-

nata, e l'espressione

$$\frac{\partial \theta}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \theta}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial q_n} dq_n$$

è un differenziale esatto. Integrando, si ricava la  $\theta$ .

Sostituendo allora nelle  $n$  identità (3) i valori dei termini  $\sum_i p_{i,i} \alpha_i$  che si ricavano dalle (4). Ponendo, in generale,

$$U_i = p_{i,i} f_i(q_i) + p_{2,i} f_2(q_i) + \dots + p_{n,i} f_n(q_i),$$

si ottiene :

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} p_{n,n} \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_n} \right)^2 + p_{2,n} \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_n} \right)^2 + \dots + p_{n,1} \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_n} \right)^2 = 2(U_n + \alpha_n) \\ \vdots \\ p_{n,n} \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right)^2 + p_{2,n} \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right)^2 + \dots + p_{n,1} \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right)^2 = 2(U_1 + \alpha_1) \\ \vdots \\ \ddots \end{array} \right.$$

Potranno dunque sostituire questo sistema d'equazioni al sistema (4).

Ciò posto, un sistema di punti in moto sia caratterizzato dalla funzione delle forze  $U_i$ ; e supponiamo che siasi riuscito a porre la semplice forza viva sotto la forma

$$T = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p_{1,1}} \left( \frac{dq_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{p_{2,1}} \left( \frac{dq_2}{dt} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p_{n,1}} \left( \frac{dq_n}{dt} \right)^2 \right];$$

la  $U_i$  e le  $p$  avendo le espressioni sopra considerate.

Per formare l'equazione alle derivate parziali di Hamilton  
*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 1<sup>a</sup>.—Stampato l'8 febbrajo 1895. 17

bisogna porre, come è noto,

$$(5') \quad \frac{\partial T}{\partial q'_r} = \frac{\partial \theta}{\partial q_r},$$

dove  $q'_r$  rappresenta la derivata di  $q_r$  rispetto al tempo  $t$ .

Applicandola al nostro caso, si ha :

$$(6) \quad \frac{1}{p_{r,1}} \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial q_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

e quindi l'equazione di Hamilton

$$T = z(U_i + \alpha_i)$$

diventa

$$p_{1,1} \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right)^2 + p_{2,1} \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right)^2 + \dots + p_{n,1} \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_n} \right)^2 = z(U_i + \alpha_i),$$

che coincide colla prima delle (5).

Per integrare questa equazione sostituiamo al posto di  $\alpha_i$  l'espressione data dall'identità (3); è facile allora vedere che si possono separare le variabili, e che, separate, si ottiene il sistema (4). Da questo sistema, in virtù della formula (6), si possono ricavare le velocità  $\frac{dq_i}{dt}$ , ecc.

Ma, per quanto è stato detto, al sistema (4) è sostituibile il sistema (5); dunque, se in questo sistema d'equazioni sostituiamo a  $\frac{\partial \theta}{\partial q_r}$  l'espressione data dalla (6), si otterranno gli  $n$  integrali primi del nostro problema dinamico. Effettuando tali sostituzioni, e rammentando l'espressione di  $p_{i,r}$  si ottiene :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Phi \Phi_{k,r}}{\Phi_{k,1}^2} \left( \frac{dq_k}{dt} \right)^2 = z(U_r + \alpha_r) \quad (r = 2, 3, \dots, n)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Phi}{\Phi_{k,1}} \left( \frac{dq_k}{dt} \right)^2 = z(U_i + \alpha_i),$$

essendo  $\Phi_{k,r} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_{k,r}}$ . Il teorema proposto è dunque dimostrato.  
Saremmo giunti evidentemente allo stesso teorema, se fosse stata  $U_r$ , la funzione delle forze, e  $T$  posta sotto la forma :

$$T = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p_{1,r}} \left( \frac{dq_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{p_{2,r}} \left( \frac{dq_2}{dt} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p_{n,r}} \left( \frac{dq_n}{dt} \right)^2 \right].$$

**2<sup>a</sup> DIMOSTRAZIONE.** — Proponiamoci la questione seguente : Vedere quali funzioni devono essere  $b_{r,s}$  e  $U_r$ , perchè il problema dinamico di un sistema di punti ammetta gli  $n$  integrali che si ricavano dal sistema d'equazioni

$$(7) \quad b_{1,r} p_1^2 + b_{2,r} p_2^2 + \dots + b_{n,r} p_n^2 = 2(U_r + \alpha_r), \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

ove

$$p_s = \frac{\partial \theta}{\partial q_s},$$

colla nota formula (5'). Evidentemente si riduce a quest'altra : Come devono essere le funzioni  $b_{r,s}$  e  $U_r$ , perchè, ricavate dal sistema precedente le  $p$  in funzione delle  $q$ , l'espressione  $\sum_s p_s dq_s$  sia un differenziale esatto ?

Per cose note si hanno le  $\frac{n(n-1)}{2}$  condizioni :

$$(H_r, H_s) = \sum_a \left( \frac{\partial H_r}{\partial q_a} \frac{\partial H_s}{\partial p_a} - \frac{\partial H_r}{\partial p_a} \frac{\partial H_s}{\partial q_a} \right) = 0, \quad (\text{da } a=1 \text{ ad } a=n)$$

avendo indicato con  $H_r$  il 1° membro della (7) quando vi si ritenga trasportato anche il termine  $2 U_r$ . Ponendo in luogo di  $\frac{\partial H_r}{\partial q_a}$ ,  $\frac{\partial H_s}{\partial q_a}$ ,

$\frac{\partial H_r}{\partial p_a}$ ,  $\frac{\partial H_s}{\partial p_a}$  le loro espressioni si ottiene :

$$\sum_{s=1}^n p_s \left[ b_{a,s} \sum_i p_i^2 \frac{\partial b_{k,r}}{\partial q_s} - b_{a,r} \sum_i p_i^2 \frac{\partial b_{k,s}}{\partial q_a} - 2 \left( b_{a,s} \frac{\partial U_r}{\partial q_a} - b_{a,r} \frac{\partial U_s}{\partial q_a} \right) \right] = 0$$

od anche

$$\sum_s p_s \sum_i p_i^2 \left( b_{as} \frac{\partial b_{ir}}{\partial q_s} - b_{ar} \frac{\partial b_{is}}{\partial q_s} \right) + 2 \sum_s p_s \left( b_{as} \frac{\partial U_r}{\partial q_s} - b_{ar} \frac{\partial U_s}{\partial q_s} \right) = 0$$

Dovendo essere verificata identicamente, si ha:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{a,r} \frac{\partial b_{a,r}}{\partial q_a} - b_{a,r} \frac{\partial b_{a,s}}{\partial q_a} = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, n) \\ b_{a,i} \frac{\partial b_{i,r}}{\partial q_a} - b_{a,r} \frac{\partial b_{i,s}}{\partial q_a} = 0 \quad (a, i = 1, 2, \dots, n, s \neq i) \\ b_{a,r} \frac{\partial U_r}{\partial q_a} - b_{a,r} \frac{\partial U_i}{\partial q_a} = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

che sono appunto le condizioni alle quali devono soddisfare le funzioni  $b_r$  e  $U_r$  per rispondere alla questione proposta.

Consideriamo la prima. Possiamo scriverla:

$$\frac{\partial}{\partial q_r} \log \left( \frac{b_{ar}}{b_{ar}} \right) = 0;$$

dalla quale si ricava

$$b_{\text{err}} = b_{\text{err}} \oplus (\text{non } q_e)$$

intendendo, per brevità, con  $\varphi$  (non  $q$ ) una funzione delle  $q$  non contenente però la variabile  $q$ . In modo generale dunque, tali coefficienti per soddisfare la 1<sup>a</sup> delle (8) devono essere così formati:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{llll} b_{1,1} \varphi_{1,1} (\text{non } q_1), & b_{2,1} \varphi_{2,1} (\text{non } q_2), & \dots & b_{n,1} \varphi_{n,1} (\text{non } q_n) \\ b_{1,2} \varphi_{1,2} (\text{non } q_1), & b_{2,2} \varphi_{2,2} (\text{non } q_2), & \dots & b_{n,2} \varphi_{n,2} (\text{non } q_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1,n} \varphi_{1,n} (\text{non } q_1), & b_{2,n} \varphi_{2,n} (\text{non } q_2), & \dots & b_{n,n} \varphi_{n,n} (\text{non } q_n), \end{array} \right.$$

ove le  $b_{1,i}, b_{2,i}, \dots b_{n,i}$  sono qualunque, e qualunque sono ancora le  $\varphi_{a,r}$ .

Passiamo adesso alla 2<sup>a</sup> delle (8). Sostituendo a  $b_{a,r}, b_{a,s}, b_{i,r}, b_{i,s}$ , le espressioni ora trovate, si ottiene

$$\varphi_{a,r} \frac{\partial b_{i,i} \varphi_{i,r}}{\partial q_s} - \varphi_{a,s} \frac{\partial b_{i,i} \varphi_{i,s}}{\partial q_s} = 0,$$

ossia,

$$b_{i,i} \left( \varphi_{a,r} \frac{\partial \varphi_{i,r}}{\partial q_s} - \varphi_{a,s} \frac{\partial \varphi_{i,s}}{\partial q_s} \right) + \frac{\partial b_{i,i}}{\partial q_s} (\varphi_{a,r} \varphi_{i,r} - \varphi_{a,s} \varphi_{i,s}) = 0,$$

dalla quale

$$\frac{\partial}{\partial q_s} \log b_{i,i} = \frac{\varphi_{a,r} \frac{\partial \varphi_{i,r}}{\partial q_s} - \varphi_{a,s} \frac{\partial \varphi_{i,s}}{\partial q_s}}{\varphi_{a,r} \varphi_{i,r} - \varphi_{a,s} \varphi_{i,s}}.$$

Notando adesso che

$$\frac{\partial \varphi_{i,r}}{\partial q_s} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{i,s}}{\partial q_s} = 0,$$

si può aggiungere  $\varphi_{i,r} \frac{\partial \varphi_{i,r}}{\partial q_s}$  e togliere  $\varphi_{i,s} \frac{\partial \varphi_{i,s}}{\partial q_s}$ ; si ottiene allora facilmente

$$\frac{\partial}{\partial q_s} \log b_{i,i} = - \frac{\partial}{\partial q_s} \log (\varphi_{a,r} \varphi_{i,r} - \varphi_{a,s} \varphi_{i,s}),$$

dalla quale

$$(10) \quad \varphi_{a,r} \varphi_{i,r} - \varphi_{a,s} \varphi_{i,s} = \frac{1}{b_{i,i}} E(\text{non } q_s).$$

Scambiando tra loro gli indici  $a$  ed  $i$ , si ha ancora

$$(10') \quad \varphi_{a,r} \varphi_{i,r} - \varphi_{a,i} \varphi_{i,r} = \frac{1}{b_{i,i}} G(\text{non } q_s).$$

Queste due condizioni devono sussistere per tutte le coppie  $(a, i)$  distinte, e le coppie  $(r, s)$  distinte.

Se

$$b_{1,1} = b_{2,1} = \dots = b_{n,1} = H,$$

le due condizioni (10) e (10') si riducono ad una sola:

$$(11) \quad \varphi_{a,r} \varphi_{i,r} - \varphi_{a,s} \varphi_{i,s} = \frac{1}{H} F(\text{non } q_a, \text{ non } q_i).$$

La terza poi delle condizioni (8) diventa

$$\varphi_{a,s} \frac{\partial U_r}{\partial q_s} - \varphi_{a,r} \frac{\partial U_s}{\partial q_s} = 0,$$

la quale, notando che  $\varphi_{a,s}$  e  $\varphi_{a,r}$  non contengono la  $q_s$ , si può anche scrivere

$$(12) \quad \varphi_{a,s} U_r - \varphi_{a,r} U_s = F(\text{non } q_a).$$

Abbiamo così trovato in termini finiti le condizioni alle quali devono soddisfare le funzioni  $b_{r,s}$  e  $U$ , perché esistono gli  $n$  integrali omogenei quadratici accennati.

Ciò posto, consideriamo il determinante  $\Phi$  dato dalla (1), nel quale però riterremo sostituita la lettera  $\psi$  alla  $\varphi$ , giacchè la  $\varphi$  è stata qui adoperata con diverso significato. Allora per una notissima formula dei determinanti (Brioschi, *Teorica dei Determinanti*, pag. 11), si ha

$$(13) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{a,s}} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{i,r}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{a,r}} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{i,s}} = \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi_{a,s} \partial \psi_{i,r}}.$$

Se dunque prendiamo  $H = \frac{1}{\Phi}$  e in generale  $\varphi_{r,s} = \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{r,s}}$ , la condizione (11) è verificata.

In tal caso la (12) diventa

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{a,s}} U_r - \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{a,r}} U_s = F(\text{non } q_a).$$

Ora si vede subito che ponendo in generale

$$U_i = p_{i,i} f_i(q_i) + p_{i,1} f_1(q_i) + \dots + p_{i,n} f_n(q_i),$$

essendo  $f_1, f_2, \dots, f_n$  funzioni arbitrarie e  $p_{a,i} = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{a,i}}$ , la condizione precedente è soddisfatta.

Facendo infatti le sostituzioni e ponendo in evidenza le funzioni arbitrarie, si trova che il coefficiente di  $f_a(q_a)$  è nullo, e che quello di  $f_i(q_i)$  è

$$\frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{a,i}} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{i,i}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{a,i}} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_{i,s}} \right),$$

il quale, per la formula (13), risulta indipendente da  $q_a$ . Giunti a questo punto, con ragionamenti analoghi a quelli fatti nella 1<sup>a</sup> dimostrazione, risulta subito la verità del teorema proposto.

Roma, luglio 1894.

PIETRO BURGATTI.

## SULLE FRAZIONI CONTINUE ALGEBRICHE PERIODICHE.

Nota di Emma Bortolotti, in Bologna.

Adunanza del 13 gennaio 1899.

Tutte le dimostrazioni che dal Lagrange in poi si sono date sulla periodicità della frazione continua in cui può svilupparsi una radice di un'equazione di 2º grado, si riducono a constatare che i denominatori incompleti debbono essere, da un certo punto in poi, numeri interi positivi inferiori ad un limite determinato. Tale ragionamento non può manifestamente estendersi alle frazioni continue in cui possono svilupparsi le radici di equazioni di secondo grado i cui coefficienti sono polinomi interi di una variabile  $x$ .

M'è sembrato interessante vedere se anche in questo caso il teorema trovato dal Lagrange poteva applicarsi. A tal fine ho preso in esame la frazione continua :

$$\sigma_i = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

in cui  $a_1, a_2, \dots$  sono funzioni lineari di una variabile  $x$ ; ed ammettendo la convergenza della frazione continua (\*); e considerando che

---

(\*) Per un teorema del prof. Pincherle (R. Acc. dei Lincei, t. V, s. IV, 5 maggio 1889) una frazione continua della forma indicata, e periodica, è certamente convergente per valori della variabile  $x$  abbastanza grandi in modulo.

una frazione continua è certamente periodica se la frazione che si ottiene tralasciando un certo numero di denominatori riproduce la frazione data, ho cercato di ricondurre a questa verifica la ricerca della condizione affinchè la radice di un'equazione di 2° grado possa svilupparsi in frazione continua periodica.

A tale scopo ho incominciato col cercare la condizione necessaria e sufficiente affinchè due funzioni possano svilupparsi in frazioni continue che da un certo punto in poi abbiano gli stessi divisori parziali.

Con una semplice applicazione di quella condizione ho potuto dimostrare il seguente teorema che mi sembra notevole: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la radice di un'equazione di 2° grado a coefficienti interi in x possa svilupparsi in frazione continua periodica è che si possa risolvere con polinomi interi l'equazione indeterminata di 2° grado*

$$Au^2 - v^2 = 1$$

dove  $A$  è il discriminante dell'equazione data.

Il teorema di Lagrange non è dunque applicabile, in generale, alle equazioni algebriche di 2° grado. Il caso delle frazioni continue numeriche è incluso come caso speciale; si è così implicitamente trovata una nuova dimostrazione pel teorema di Lagrange, ed è resa inoltre manifesta la dipendenza della periodicità della frazione continua dalla risoluzione dell'equazione Pelliana, mentre finora non si era considerato che la dipendenza inversa.

Supposto poi di avere un'equazione algebrica di 2° grado di cui una radice si possa svolgere in frazione continua periodica, ho dimostrato che anche l'altra radice potrà svolgersi in frazione continua periodica coi medesimi periodi scritti in ordine inverso. Per questa dimostrazione mi sono giovata di alcune considerazioni trovate dal Gerono sulle frazioni continue inverse, e ricordate dal Catalan nel 1° fascicolo 1894 del giornale di Battaglini.

## I.

1. Siano due funzioni  $\sigma_1, \varepsilon_1$  le quali si possano sviluppare se-

*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 1<sup>a</sup>.—Stampato il 9 febbrajo 1895. 18

condo gli algoritmi

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 + a_1 \sigma_1 = \sigma_2 \\ -\sigma_1 + a_2 \sigma_2 = \sigma_3 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 + a'_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 + a'_2 \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

che supporremo convergenti.

*La condizione necessaria e sufficiente affinchè negli sviluppi delle funzioni  $\sigma_i, \varepsilon_i$ , secondo l'algoritmo così definito, tutti i fattori lineari che man mano si vanno trovando, ad eccezione di un numero finito di essi, siano i medesimi per le due funzioni, è che queste si ottengano l'una dall'altra mediante una sostituzione lineare*

$$\sigma_i = \frac{a - b \varepsilon_i}{c - d \varepsilon_i},$$

dove  $a, b, c, d$  sono polinomi interi, ed il determinante  $ad - bc$  è uguale all'unità.

LA CONDIZIONE È NECESSARIA: Si abbia per  $\sigma_i$  la successione di divisori

$$a_1, a_2, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_n, \dots,$$

per  $\varepsilon_i$  la successione

$$a'_1, a'_2, \dots a'_p, b_1, b_2, \dots b_n, \dots$$

Indicando con  $\eta$  la funzione rappresentata dalla frazione continua infinita:

$$\eta = (b_1, b_2, \dots b_n, \dots)$$

che, per le ipotesi poste, converge, avremo:

$$\sigma_i = \frac{P_m - P_{m-1} \eta}{Q_m - Q_{m-1} \eta}, \quad \varepsilon_i = \frac{P'_p - P'_{p-1} \eta}{Q'_p - Q'_{p-1} \eta}$$

da cui

$$\sigma_1 = \frac{(Q'_p P_{m-1} - Q'_{p-1} P_m) \varepsilon_1 - (P'_p P_{m-1} - P'_{p-1} P_m)}{(Q'_p Q_{m-1} - Q'_{p-1} Q_m) \varepsilon_1 - (P'_p Q_{m-1} - P'_{p-1} Q_m)}.$$

Dunque  $\sigma_1$  si ottiene da  $\varepsilon_1$  mediante una sostituzione lineare il cui determinante è manifestamente uguale all'unità.

**LA CONDIZIONE È SUFFICIENTE:** Siano  $\sigma_1, \varepsilon_1$  due funzioni della variabile  $x$  tali che si abbia

$$\varepsilon_1 = \frac{a - b\sigma_1}{c - d\sigma_1}, \quad \text{con } ad - bc = 1.$$

Dico che, nell'ipotesi che tanto  $\varepsilon_1$  quanto  $\sigma_1$  si possano sviluppare in frazione continua convergente, da un certo punto in poi tutti i divisori parziali dovranno coincidere nei due sviluppi.

Supponiamo intanto di aver sviluppato  $\sigma_1$  in frazione continua, avremo :

$$\sigma_1 = \frac{P_m - P_{m-1}\eta_{m+1}}{Q_m - Q_{m-1}\eta_{m+1}},$$

sostituendo :

$$\varepsilon_1 = \frac{aQ_m - bP_m - (aQ_{m-1} - bP_{m-1})\eta_{m+1}}{cQ_m - dP_m - (cQ_{m-1} - dP_{m-1})\eta_{m+1}} = \frac{R - R'\eta_{m+1}}{S - S'\eta_{m+1}}$$

in cui è  $RS' - R'S = 1$ . Ora siccome la  $\eta_{m+1}$  è una funzione del grado — 1 in  $x$ , che non dipende per niente dai primi  $m$  divisori incompleti  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , ma solo dai successivi  $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$ , se proveremo che  $\frac{R'}{S'}, \frac{R}{S}$  sono due ridotte consecutive nello sviluppo di  $\varepsilon_1$ , sarà dimostrato l'asserto. Ora si ha

$$\frac{R}{R'} = \frac{aQ_m - bP_m}{aQ_{m-1} - bP_{m-1}} = \frac{Q_m}{Q_{m-1}} \frac{\left(\frac{a}{b} - \sigma_1\right) - \left(\frac{c_{2m+1}}{x^{2m+1}} + \frac{c_{2m+2}}{x^{2m+3}} + \dots\right)}{\left(\frac{a}{b} - \sigma_1\right) - \left(\frac{c_{2m}}{x^{2m}} + \frac{c_{2m+1}}{x^{2m+1}} + \dots\right)}.$$

Ma  $a$  e  $b$  rappresentano due polinomi interi in  $x$ , nella differenza  $\frac{a}{b} - \sigma_1$  (poichè non è  $\frac{a}{b} = \sigma_1$ ) potranno dunque annullarsi soltanto alcuni termini in numero finito; se lo sviluppo di questa differenza in serie di potenze negative di  $x$  incomincia con l'esponente  $-v$ , disporremo di  $m$  in modo che sia  $2m > v$ .

Saremo allora certi che lo sviluppo in serie della frazione

$$\frac{\left(\frac{a}{b} - \sigma_1\right) - \left(\frac{c_{2m+1}}{x^{2m+1}} + \dots\right)}{\left(\frac{a}{b} - \sigma_1\right) + \left(\frac{c_{2m}}{x^{2m}} + \dots\right)}$$

incomincia col termine 1. Lo sviluppo di  $\frac{R}{R'}$  incomincerà con lo stesso termine col quale comincia quello di  $\frac{Q_m}{Q_{m-1}}$ .

Ma  $Q_m$  è un polinomio il cui grado in  $x$  è di un'unità superiore al grado di  $Q_{m-1}$ , sarà dunque anche il grado di  $R$  superiore per un'unità a quello di  $R'$ . Similmente si proverebbe che il grado di  $S$  supera per un'unità quello di  $S'$ .

Da questa dimostrazione e dalla proprietà

$$RS' - SR' = 1$$

risulta che  $R$  ed  $S$  sono primi fra loro e che il grado di  $S$  supera per un'unità quello di  $R$ .

Si consideri ora la differenza

$$\varepsilon_1 - \frac{R}{S} = \frac{\eta_{m+1}}{S(S - S'\eta_{m+1})}.$$

Se  $S$  è del grado  $\mu$ ,  $S'$  è del grado  $\mu - 1$ , la  $\eta_{m+1}$  è del grado  $-1$ , la frazione del grado  $-(2\mu + 1)$ , dunque la differenza  $\varepsilon_1 - \frac{R}{S}$  sviluppata in serie di potenze negative di  $x$  comincerebbe col ter-

zione di grado  $-(2\mu + 1)$ . Il suo denominatore è di grado  $\mu$ , dunque è veramente la  $\mu^{\text{ma}}$  ridotta di  $\sigma_i$ .

Similmente si dimostrerebbe che  $\frac{R'}{S'}$  è la ridotta d'ordine  $\mu - 1$ , dunque è provato quanto si voleva.

## II.

2. Data una funzione  $\sigma_i$ , formando il sistema:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 + a_1 \sigma_i = \sigma_2 \\ -\sigma_1 + a_2 \sigma_2 = \sigma_3 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

può avvenire che la successione  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  sia formata con un numero limitato di elementi che si riproducono periodicamente nel medesimo ordine. Il periodo potrà incominciare subito col primo termine, o dopo un numero determinato di termini; la frazione continua corrispondente nel primo caso dicesi *periodica semplice, mista* nel secondo.

Sia una funzione  $\sigma_i$  che possa svilupparsi nella frazione continua periodica mista

$$(2) \quad \sigma_i = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_p, b_1, \dots).$$

Indicando con  $\eta$  la frazione continua periodica semplice

$$\eta = (b_1, b_2, \dots, b_p, b_1, \dots)$$

avremo:

$$(3) \quad \sigma_i = \frac{P_n - P_{n-1}\eta}{Q_n - Q_{n-1}\eta}, \quad \eta = \frac{P_n - Q_n\sigma_i}{P_{n-1} - Q_{n-1}\sigma_i}$$

la quale ci dimostra che: Se una funzione  $\sigma_i(x)$  può svilupparsi in frazione continua periodica mista, mediante una sostituzione lineare, a determinante uguale all'unità, può trasformarsi in una frazione continua periodica semplice col medesimo periodo.

3. Dimostriamo ora che : *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione  $\sigma_1(x)$ , sviluppata secondo l'algoritmo indicato, dia origine ad una frazione continua periodica, è che sia radice di un'equazione di 2° grado a coefficienti interi in  $x$  :  $a\sigma^2 + b\sigma + c = 0$ , nella quale sia possibile la scomposizione del coefficiente  $b$  in due parti  $b_1 + b_2$  in modo che si abbia  $a c - b_1 b_2 = 1$ .*

4. LA CONDIZIONE È NECESSARIA : Se la frazione continua cui  $\sigma_1$  dà origine è periodica semplice ed è  $a_1, a_2, \dots a_p$  il periodo, avremo per la  $\sigma_1$  verificata l'egualianza :

$$Q_{p-1}\sigma_1^2 - (P_{p-1} + Q_p)\sigma_1 + P_p = 0$$

il cui determinante è evidentemente uguale ad 1.

Se poi la frazione continua è periodica mista ed è  $a_1, a_2, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_p, b_1, b_2, \dots$  la serie dei divisori parziali, chiamando  $\eta$  la frazione continua periodica semplice che si ottiene tralasciando i primi  $m$  termini, avremo, per la formula (3) :

$$\eta = \frac{P_m - Q_m \sigma_1}{P_{m-1} - Q_{m-1} \sigma_1}.$$

Ma anche spezzando la serie dopo il primo periodo, si avrebbe avuto la frazione continua  $\eta$ , cui solamente mancherebbe il primo periodo, il che non influisce essendo i periodi in numero infinito, si avrà dunque :

$$\eta = \frac{P_{m+p} - Q_{m+p} \sigma_1}{P_{m+p-1} - Q_{m+p-1} \sigma_1}$$

e quindi :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} (Q_m Q_{m+p-1} - Q_{m-1} Q_{m+p}) \sigma_1^2 - \\ - [(P_m Q_{m+p-1} - P_{m-1} Q_{m+p}) + (Q_m P_{m+p-1} - Q_{m-1} P_{m+p})] \sigma_1 - \\ - (P_m P_{m+p-1} - P_{m-1} P_{m+p}) = 0 \end{array} \right.$$

il cui determinante è evidentemente uguale all'unità.

5. LA CONDIZIONE È SUFFICIENTE: Si abbia l'equazione di 2° grado

$$(5) \quad a\sigma^2 - b\sigma + c = 0$$

in cui supporremo possibile la scomposizione di  $b$  in due parti  $b_1 + b_2$ , tali che si abbia  $ac - b_1 b_2 = 1$ .

Potremo scrivere l'equazione data sotto la forma

$$\sigma = \frac{b_2\sigma - c}{a\sigma - b_1}.$$

Una funzione che sia radice dell'equazione data dovrà dunque trasformarsi in sé stessa mediante la sostituzione lineare  $\sigma = S\sigma$  a determinante uguale ad 1.

Si immagini una radice  $\sigma_i$  di questa equazione sviluppata in frazione continua e supponiamo che questa frazione continua sia convergente. Se  $\frac{P_n}{Q_n}$  è l' $n^{th}$  ridotta si avrà

$$(6) \quad \sigma_i = \frac{P_n - P_{n-1}\eta}{Q_n - Q_{n-1}\eta}$$

ed eliminando  $\sigma_i$  avremo:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{(aP_n^2 + bP_nQ_n + cQ_n^2) - (aP_nP_{n-1} + bP_nQ_{n-1} + cQ_nQ_{n-1})\eta}{(aP_nP_{n-1} + bP_nQ_{n-1} + cQ_nQ_{n-1}) - (aP_{n-1}^2 + bP_{n-1}Q_{n-1} + cQ_{n-1}^2)\eta} = \\ = \frac{A - B\eta}{A_i - B_i\eta} \end{array} \right.$$

in cui è  $AB_i - A_iB = 1$ .

Se dunque dimostreremo che  $\frac{A}{A_i}$ ,  $\frac{B}{B_i}$  sono due ridotte consecutive nello sviluppo di  $\eta$  in frazione continua, la formula (7) ci mostrerà che da un certo punto in poi la successione  $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$  riproduce tutta la successione primitiva  $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ ; la  $\eta$  potrà così svilupparsi in frazione continua periodica semplice e la  $\sigma_i$ ,

per la formula (6) rappresenterà una periodica mista con lo stesso periodo della  $\pi$ . Ora si ha :

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{aP_n + bP_{n-1}Q_n + cQ_n^2}{aP_nP_{n-1} + bP_{n-1}Q_n + cQ_nQ_{n-1}} = \\ &= \frac{Q_n}{Q_{n-1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{Q_nQ_{n-1}} \frac{a\frac{P_n}{Q_n} + b}{a\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^2 + b\frac{P_n}{Q_n} + c}}.\end{aligned}$$

Ora, qualunque sia  $n$  il quoziente  $\frac{P_n}{Q_n}$  è sempre del grado  $-1$ .

Il grado  $v$  del quoziente  $\frac{a\frac{P_n}{Q_n} + b}{a\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^2 + b\frac{P_n}{Q_n} + c}$  è dunque indipendente da  $n$ . Potremo quindi sempre disporre di  $n$  in modo che sia  $2n - 1$  (grado di  $Q_n Q_{n-1}$ ) maggiore di  $v$ . Saremo allora certi che lo sviluppo in serie di potenze decrescenti di  $x$  della frazione

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{Q_n Q_{n-1}} \frac{a\frac{P_n}{Q_n} + b}{a\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^2 + b\frac{P_n}{Q_n} + c}}$$

incomincia con l'unità. Dunque lo sviluppo di  $\frac{A}{B}$  comincerà con lo stesso termine di quello di  $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ . Ma il grado di  $Q_n$  in  $x$  è superiore per un'unità a quello di  $Q_{n-1}$ , anche il grado di  $A$  supererà quello di  $B$  per un'unità. Analoga dimostrazione potrebbe ripetersi per  $A_1, B_1$ .

Si consideri ora la differenza

$$\eta - \frac{A}{A_1} = \frac{\eta}{A_1(A_1 - B_1\eta)}.$$

Se  $A_i$  è del grado  $\mu$ ,  $B_i$  è del grado  $\mu - 1$ ,  $\eta$  è del grado  $-1$ , quella differenza è del grado  $-(2\mu + 1)$ . La  $\frac{A}{A_i}$  è dunque veramente la ridotta d'ordine  $\mu^{\text{mo}}$  nello sviluppo di  $\eta$ .

Così

$$\eta - \frac{B}{B_i} = \frac{\eta}{B_i(A_i - B_i\eta)}$$

è del grado  $-(2\mu - 1)$ , dunque  $\frac{B}{B_i}$  è la ridotta d'ordine  $\mu - 1^{\text{mo}}$  c. d. d.

6. Per la condizione ora dimostrata, affinché una funzione  $\sigma_i$ , che è radice di un'equazione algebrica di  $2^{\circ}$  grado:  $a\sigma^2 + 2b\sigma + c = 0$ , possa svilupparsi in frazione continua periodica è necessario e sufficiente che il polinomio  $b$  possa scomporsi nella somma di due  $b_1 + b_2$ , in modo che si abbia  $ac - b_1b_2 = 1$ .

Si hanno dunque le due equazioni :

$$b_1 + b_2 = 2b, \quad b_1b_2 = ac - 1$$

da cui :

$$b_1 = b + \sqrt{b^2 - ac + 1}, \quad b_2 = b - \sqrt{b^2 - ac + 1}.$$

Ma  $b_1$ ,  $b_2$  debbono essere *polinomi razionali ed interi in x*; si vede che, affinché la scomposizione sia possibile nel modo richiesto, occorre che la quantità sotto il segno sia un quadrato perfetto. Ma  $b^2 - ac$  è il discriminante dell'equazione proposta; potrà dunque sempre svilupparsi in frazione continua periodica una funzione  $\sigma$  che sia radice di un'equazione di  $2^{\circ}$  grado il cui discriminante aumentato di un'unità sia uguale al quadrato di un polinomio intero in  $x$ . O, più generalmente, si potranno considerare le equazioni che, mediante sostituzioni della forma:  $\sigma = \frac{a_i\eta + b_i}{c_i\eta + d_i}$ , dove  $a_i, b_i, c_i, d_i$  sono polinomi interi qualunque, si ottengono dalla proposta, e cercare se

per una tale equazione :

$$(aa_i^2 + 2bc_i a_i + cc_i^2)\eta^2 + 2(aa_i b_i + bb_i c_i + a_i b d_i + cc_i d_i)\eta + \\ + (ab_i^2 + 2bb_i d_i + cd_i^2) = 0$$

la condizione enunciata è soddisfatta. Ora in una tale equazione il discriminante ha la forma :

$$(b^2 - ac)(a_i d_i - b_i c_i)^2,$$

indicando con  $A$  il discriminante dell'equazione data e con  $u$  il determinante  $(a_i d_i - b_i c_i)$  della sostituzione dovrà essere soddisfatta la condizione :

$$(8) \quad Au^2 + 1 = v^2$$

dove  $u$  e  $v$  sono polinomi interi da determinarsi.

Manifestamente poi, ogni qualvolta quest'equazione indeterminata di 2° grado possa esser risolta con polinomi interi, la periodicità della frazione continua rimane provata, perchè, trovato il valore di  $u$ , per formare una sostituzione lineare di determinante  $u$ , basterebbe porre  $\sigma = -un$ ; e, nell'equazione  $a\eta^2 - 2b\eta + c = 0$  risultante,  $b = b_i + b_2$  con  $b_i = b + v$ ,  $b_2 = b - v$  perchè fosse verificata la condizione  $ac - b_i b_2 = 1$ .

E se l'equazione stessa non potesse risolversi con polinomi interi, per quanto abbiamo detto, la frazione continua non potrebbe essere periodica.

*Tutto si riduce dunque alla ricerca della possibilità di risoluzione, mediante polinomi interi, dell'equazione indeterminata di 2° grado:*

$$(9) \quad Au^2 + 1 = v^2.$$

7. Si consideri p. es. l'equazione :

$$y^2 - 2y(x - 1) + 2 = 0.$$

Il discriminante di quest'equazione è :  $A = x^2 - 2x - 1$ . Si

dovrà dunque risolvere con polinomi interi l'equazione :

$$u^2(x^2 - 2x - 1) + 1 = v^2.$$

Quest'equazione potrà esser ridotta immediatamente ponendo :

$$u^2 = x^2 - 2x + 1, \quad u = x - 1$$

perchè allora risulterà :

$$v^2 = (x^2 - 2x)^2, \quad v = x^2 - 2x.$$

Dovremo dunque trasformare l'equazione data mediante la sostituzione :  $y = (x - 1)\sigma$ . Si avrà così l'equazione :

$$\sigma^2(x - 1)^2 - 2(x - 1)^2\sigma + 2 = 0.$$

Scomporremo il coefficiente  $b = (x - 1)^2$ , nella somma dei due :

$$b_1 = b + v = 2x^2 - 4x + 1, \quad b_2 = b - v = 1.$$

Allora si avrà :

$$\sigma^2(x - 1)^2 - (2x^2 - 4x + 1)\sigma - 1 + 2 = 0,$$

in cui il determinante è = 1. Le radici dell'equazione data, dovranno dunque essere sviluppabili in frazione continua periodica. Si può anzi determinare immediatamente il periodo osservando che può scrittersi :

$$\sigma = \frac{1}{x - 1} \frac{2 - \sigma}{2(x - 1) - (x - 1)\sigma - \frac{1}{x - 1}}.$$

Chiamando con  $\eta$  la seconda frazione del secondo membro, avremo :  $\sigma = \frac{1}{x - 1} \eta$  od anche  $(x - 1)\sigma = \eta$ .

Dunque sostituendo :

$$\sigma = \frac{1}{x - 1} \frac{2 - \frac{\eta}{x - 1}}{2(x - 1) - \eta - \frac{1}{x - 1}} = \frac{1}{x - 1} \frac{1}{(x - 1) - \frac{1}{2(x - 1) - \eta}}$$

che verifica appunto la periodicità accennata.

8. Se il discriminante  $A$  non dipende da  $x$ , cioè si riduce ad una costante numerica, la equazione (9) è una ordinaria equazione Pelliana che si può sempre risolvere. In particolare rimane così dimostrato con nuovo metodo il teorema dovuto al Lagrange relativo alle radici di equazioni di 2° grado a coefficienti numerici.

Ma se il discriminante  $A$  dipende da una variabile  $x$ , nulla può dirsi sulla possibilità di risoluzione dell'equazione (9) poichè tutti i metodi di dimostrazione e risoluzione adoperati finora per l'equazione Pelliana, riposano esclusivamente sul concetto di numero intero e positivo. Si può osservare anzi che: *Nel caso in cui il discriminante A sia di grado impari in x, l'equazione (9) è certamente impossibile con polinomi interi.*

E questo risulta evidente dal fatto che il termine  $A u^2$  è in tal caso di grado impari in  $x$ , il termine  $v^2$  di grado pari, la loro differenza non può ridursi all'unità (\*).

9. Se una delle radici di un'equazione di 2° grado a coefficienti interi in  $x$  si può sviluppare in frazione continua periodica, l'altra radice si potrà sviluppare in frazione pure periodica il cui periodo è formato con gli stessi elementi presi in ordine inverso, che costituivano il periodo della prima.

La frazione continua in cui si può sviluppare la prima radice, sia periodica semplice e si abbia

$$\sigma_i = \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\dots - \cfrac{1}{a_p - \cfrac{1}{a_i - \dots}}}}}$$

L'equazione di secondo grado di cui  $\sigma_i$  è radice, avrà allora la forma:

$$Q_{p-1} \sigma_i^2 - (P_{p-1} + Q_p) \sigma_i + P_p = 0.$$

(\*) Questa osservazione mi fu comunicata dal prof. Zsigmondy di Vienna.

Si consideri ora la funzione

$$\sigma_2 = a_p - \frac{1}{a_{p-1} - \dots - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_p - \dots}}}$$

La funzione inversa di questa

$$\frac{1}{\sigma_2} = y = \frac{1}{a_p - \dots - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_p - \dots}}}$$

soddisferà per la stessa formula, all'equazione :

$$Q'_{p-1}y^2 - (P'_{p-1} - Q'_p)y - P'_p = 0;$$

onde sarà :

$$P'_p\sigma_2^2 - (P'_{p-1} + Q'_p)\sigma_2 + Q'_{p-1} = 0$$

L'equazione cui soddisfa la  $\sigma_2$ .

Ora siccome le  $P$  e  $Q$  sono formate con gli elementi  $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p$ , e le  $P', Q'$  con gli elementi stessi ma in ordine inverso, così, per teorema di Gerono, sarà

$$P'_p = Q_{p-1}, \quad P'_{p-1} = P_{p-1}, \quad Q'_p = Q_p, \quad Q'_{p-1} = P_p.$$

L'equazione cui soddisfa la  $\sigma_2$  sarà dunque :

$$Q_{p-1}\sigma_2^2 - (P_{p-1} + Q_p)\sigma_2 + P_p = 0$$

quella stessa cioè cui soddisfaceva la  $\sigma_1$ , c. d. d.

Se la frazione continua in cui si svolge la radice  $\sigma_1$  sia periodica mista, mediante la formula (3) si riconduce al caso precedentemente considerato.

EMMA BORTOLOTTI.

A PROPOS DE QUELQUES RÉCENTS  
TRAVAUX MATHÉMATIQUES;

par M. Émile Picard, à Paris.

(Dalla *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 3<sup>e</sup> année, n° 21: 15 novembre 1892).

Je ne me propose pas, dans l'article qu'on va lire, de faire une revue des travaux mathématiques intéressants parus depuis la dernière revue d'Analyse que j'ai publiée dans ces colonnes en 1890 (\*). On voudra bien voir dans les pages qui suivent une simple conversation mathématique, à propos de quelques-uns des sujets qui préoccupent en ce moment les géomètres: j'ai choisi la théorie des groupes et celle des équations différentielles.

I.

J'ai déjà parlé (\*\*) avec quelques détails de l'admirable théorie des groupes de transformations due à M. Sophus Lie. L'illustre géomètre norvégien continue son œuvre. Il vient de consacrer deux mémoires aux fondements de la géométrie. La question est d'un assez grand intérêt philosophique pour que nous nous y arrêtons de nouveau.

On sait combien les travaux de Gauss et de Riemann sont importants dans l'histoire de nos idées sur les hypothèses qui sont à la base de la géométrie. Dans cette théorie, c'est l'expression de l'élément de distance qui joue le rôle essentiel, et les recherches de ces grands géomètres ont été l'origine de deve-

---

(\*) Voir la *Revue* du 30 novembre 1890, t. I, p. 703 et suiv., et ces *Rendiconti*, t. V (1891), p. 80 et suiv.

(\*\*) *Loc. cit.*

loppements analytiques du plus haut intérêt concernant en particulier les formes quadratiques de différentielles. On doit reconnaître cependant que Gauss et Riemann n'ont pas vu le véritable point de départ à adopter dans l'étude des fondements de la géométrie. Il semble que ce soit Helmholtz qui ait le premier placé la question sur son véritable terrain: son idée fondamentale consiste à porter l'attention sur l'ensemble des mouvements possibles dans l'espace dont on fait l'étude. La théorie des groupes n'était pas encore créée à l'époque où le célèbre physicien écrivait son mémoire; il était presque inévitable qu'il commît quelques erreurs. M. Lie vient de reprendre complètement cette étude en se plaçant au point de vue de la théorie des groupes, et nous allons résumer les conclusions auxquelles il est parvenu.

Nous considérons un espace à trois dimensions et nous regardons un point de cet espace comme défini par trois quantités ( $x, y, z$ ) que l'on appelle les coordonnées du point; Qu'appellerons-nous mouvement dans cet espace? Un mouvement d'une portion de l'espace est défini par trois équations:

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, z) \\y' &= \varphi(x, y, z) \\z' &= \psi(x, y, z).\end{aligned}$$

Par cette transformation un ensemble  $E$  de points ( $x, y, z$ ) devient un autre ensemble  $E'$  de points ( $x', y', z'$ ): la transformation qui précède est pour nous un mouvement qui amène  $E$  en  $E'$ . Ceci posé, nous faisons sur l'espace que nous voulons étudier les hypothèses suivantes:

1° Les mouvements possibles dans cet espace sont tels qu'ils laissent invariable une fonction  $\Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$  des coordonnées de deux points quelconques  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$ . En d'autres termes, si on désigne par  $(x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2)$  les coordonnées de ces points après un quelconque des mouvements possibles on aura

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \Omega(x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2).$$

L'origine de cette hypothèse s'aperçoit d'elle-même: en langage ordinaire et sans signe algébrique, on peut dire grossièrement que, en la faisant, on veut qu'il y ait relativement à deux points de l'espace quelque chose qui reste invariable après le mouvement; on pourra appeler ce quelque chose la distance de deux points.

2° On veut, comme le disait Helmholtz, que le mouvement libre soit possible dans une certaine région de l'espace. Voici ce que l'on doit entendre par cette hypothèse complexe, bien approfondie par M. Lie. Tout d'abord, quand un point de la région est fixé, tout autre point de cette région, sans aucune exception, décrit une surface (multiplicité à deux dimensions). Ensuite quand deux points sont fixés, un point arbitraire (des exceptions étant possibles) décrit une courbe (multiplicité à une dimension); enfin si trois points arbitraires sont fixés dans la

région, tous les points de celles-ci restent en repos (des exceptions étant possibles).

Telles sont les conditions que nous imposons à l'espace. Il en résulte nécessairement que l'ensemble des mouvements possibles doit former un groupe à six paramètres. On connaît deux types d'espaces satisfaisant à ces conditions. C'est tout d'abord l'espace ordinaire ou euclidien; tels sont aussi les deux espaces non euclidiens, c'est-à-dire les espaces dans lesquels le groupe des mouvements possibles est le groupe projectif transformant en elle-même l'une ou l'autre des surfaces du second degré:

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm t = 0.$$

M. Lie a établi que les groupes précédents sont les seuls qui jouissent des propriétés (1) et (2): c'est là un résultat bien remarquable et qui montre que les espaces euclidiens et non euclidiens sont les seuls où l'on puisse faire logiquement les hypothèses qui, dégagées, bien entendu, de leur forme scientifique, sont regardées par quiconque n'a pas réfléchi à ces questions comme ayant un caractère nécessaire.

La démonstration du théorème de M. Lie est fort délicate. Ainsi les mots « sans aucune exception », que nous avons soulignés plus haut, sont d'une extrême importance. Si l'on cherche le groupe des mouvements à six paramètres satisfaisant à l'hypothèse (2), on ne trouve que les groupes euclidiens et non euclidiens, mais si on supprime les mots soulignés, on reconnaît qu'il existe d'autres groupes que les précédents. Ajoutons encore que les problèmes analogues dans le plan admettent des solutions entièrement différentes: les espaces à deux dimensions euclidiens et non euclidiens ne sont pas caractérisés par les propriétés qui leur appartiennent uniquement dans le cas de trois dimensions. Cette circonstance n'avait pas autrefois échappé à Helmholtz. On peut dire, en résumé, que les dernières recherches de M. Lie épousent, pour les géométries, sinon pour les philosophes, la question des principes de la géométrie.

Nous ne nous éloignerons pas de la théorie des groupes en parlant des *quantités complexes*. C'est une question sur laquelle a plané longtemps une certaine obscurité, qu'entretenait le mot un peu mystique de quantités *imaginaires*. Le sujet ne présente plus aujourd'hui rien de mystérieux. Dans un mémoire publié en 1884, M. Weierstrass a développé une théorie des nombres complexes. Il suppose que l'on considère des nombres de la forme

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

où les  $x$  sont des nombres réels ordinaires. Les  $e$  sont de purs symboles. On fait l'hypothèse que la somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres de l'ensemble font eux-mêmes partie de cet ensemble. Les produits

$$e_p e_q \quad (p, q = 1, 2, \dots, n)$$

sont donc des expressions  $E_{p,q}$  linéaires et homogènes en  $e_1, e_2, \dots, e_n$  qui jouent

le rôle essentiel dans la théorie. M. Weierstrass suppose de plus que les théorèmes dits *commutatif* et *associatif* subsistent tant pour l'addition que pour la multiplication. Pour l'addition ils sont vérifiés d'eux-mêmes; pour la multiplication, ils s'expriment par les égalités:

$$(1) \quad ab = ba$$

$$(2) \quad (ab)c = a(bc)$$

$a, b, c$  étant trois nombres quelconques de l'ensemble. Ces conditions conduisent à certaines relations entre les coefficients de formes linéaires  $E_{p,q}$ . A tout système de coefficients de formes  $E_{p,q}$  vérifiant ces relations, correspondra un ensemble de *nombres complexes*. Les quantités complexes ordinaires correspondent à:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = i.$$

Les nombres complexes, que nous venons de définir, diffèrent seulement en un point des nombres complexes ordinaires. Quand  $n$  est supérieur à deux, il existe des nombres différents de zéro, dont le produit par certains autres nombres est nul. M. Weierstrass appelle ces nombres des *diviseurs de zéro*. Malgré cette singularité, cette nouvelle algèbre est réductible à l'algèbre des nombres complexes de la forme  $\alpha + \beta i$ ; l'illustre géomètre de Berlin a en effet établi que, si  $a$  et  $b$  désignent deux nombres quelconques de l'ensemble, on peut les décomposer en un certain nombre de composants  $a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_r$  tels que

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_r$$

$$b = b_1 + b_2 + \dots + b_r$$

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_r b_r$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_r}{b_r}$$

les composants  $a_i, b_i$  dépendant seulement d'une ou deux unités fondamentales. Ce théorème montre bien que le calcul des nouvelles quantités se déduira toujours avec facilité du calcul ordinaire; il n'y a pas là un instrument nouveau dont puisse profiter l'Analyse mathématique.

Nous avons admis que les lois commutative et associative subsistaient dans l'algèbre précédente. On s'est placé à un point de vue plus général en supposant que, seule, la loi associative exprimée par l'égalité (2) subsistait. On a alors une algèbre beaucoup plus générale; celle-ci est complètement déterminée par le système des expressions linéaires  $E_{p,q}$ . Un exemple célèbre d'un système à quatre unités  $e_1, e_2, e_3, e_4$  est fourni par les *quaternions* d'Hamilton où l'on a:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = i, \quad e_3 = j, \quad e_4 = k$$

avec les relations

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j.$$

Une remarque très intéressante de M. Poincaré va nous ramener à la théorie de groupes. L'éminent géomètre a fait le premier la remarque qu'à chaque système d'unités complexes correspond un groupe continu de substitutions linéaires à  $n$  variables, dont les coefficients sont des fonctions linéaires de  $n$  paramètres arbitraires. Cette idée a été approfondie, dans un mémoire récent, par un élève de M. Lie, M. Scheffer, qui a été ainsi conduit à partager les nombres complexes en deux classes suivant que le groupe qui leur correspond est intégrable ou non intégrable. A cette dernière classe appartient le groupe correspondant aux quaternions et ceux-ci sont les représentants les plus simples de cette catégorie de nombres complexes. On demandera peut-être maintenant si ce vaste symbolisme est susceptible d'accroître un jour la puissance de l'Analyse. Il est dangereux d'être prophète, mais il me semble que ces algèbres nouvelles ne pourront avoir d'autre intérêt pratique que de conduire peut être à des notations plus condensées; on le voit, au reste, pour les quaternions dont l'emploi, si pris en Angleterre, n'est nulle part indispensable. Le rapprochement entre la théorie des groupes et le calcul symbolique n'en est pas moins, au point de vue spéculatif, d'un grand intérêt.

L'idée d'un système de fonctions formant un groupe n'est pas seulement bornée au cas où il n'y a dans l'ensemble qu'un nombre fini de paramètres. M. Lie s'est beaucoup occupé dans ces derniers temps des groupes *infinis*, les groupes considérés jusqu'ici étant dits groupes *finis* parce qu'ils dépendent d'un nombre fini de paramètres arbitraires. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque contenant  $n$  fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; ces équations définiront un groupe si, prenant deux solutions quelconques

$$\begin{aligned} u_i &= F_i(x_1, \dots, x_n) \\ v_i &= \Phi_i(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

on obtient encore une solution en prenant les fonctions

$$F_i(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n).$$

La théorie des invariants différentiels s'étend aux groupes infinis. On entend par invariant différentiel relatif à  $m+p$  lettres  $x_1, x_2, \dots, x_m, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$  toute fonction des  $x$ , des  $\zeta$  et de leurs dérivées considérées comme fonctions des

$x$ , qui garde la même forme quand on effectue sur les  $x$  et les  $\zeta$  les substitutions du groupe. Nous reviendrons tout à l'heure sur leur rôle important dans la théorie des équations différentielles.

Certains groupes infinis jouissent de propriétés particulières. J'ai appelé l'attention sur les cas où les équations aux dérivées partielles qui définissent le groupe, ne renferment pas explicitement les variables indépendantes. La recherche de ces équations revient alors à la formation de certains groupes finis. Ces équations peuvent être considérées comme généralisant les deux équations classiques dans la théorie des fonctions d'une variable complexe, et c'est en cela que leur étude mériterait d'être poursuivie. Il est d'ailleurs vraisemblable qu'il y a d'autres cas que ceux que je viens de signaler dans lesquels la recherche des groupes infinis peut se ramener à la recherche des groupes finis.

## II.

On entend quelquefois des personnes, d'ailleurs très instruites, mais pour qui les mathématiques se réduisent aux cas d'égalité des triangles, se demander ce qu'il peut bien y avoir à faire aujourd'hui en mathématiques. Il est malheureux qu'on ne puisse leur donner le conseil d'apprendre le calcul intégral, pour juger des progrès que réclamerait la théorie des équations différentielles.

Malgré les efforts des plus grands géomètres, cette théorie se réduit longtemps à une monographie de cas particuliers. Un des résultats les plus intéressants des travaux de M. Lie est d'avoir fait une vaste synthèse de ces travaux isolés. Le fait d'admettre un groupe de transformations réduit, pour une équation différentielle, la difficulté de l'intégration, et on peut rattacher aux théories du géomètre norvégien la plupart des cas élémentaires connus. A un point de vue plus profond, la théorie des groupes infinis paraît extrêmement importante pour l'étude des équations différentielles et il semble que, dans cette voie, les recherches promettent d'être fécondes. Ainsi M. Lie montre qu'une équation différentielle ordinaire d'ordre quelconque possède des invariants relativement à toute transformation de points. Les invariants considérés autrefois par Laguerre et Halphen dans la théorie des équations linéaires forment, pour une transformation de points particulière, un bien remarquable exemple; il en est de même des invariants considérés par M. Appell et par M. Roger Liouville. Voici un genre d'applications fort intéressantes, auxquelles conduit la conception générale de M. Lie. Halphen, dans un mémoire célèbre, a trouvé les conditions pour qu'une équation différentielle linéaire puisse être ramenée à une équation linéaire intégrable. Ce problème peut s'étendre à une équation non linéaire d'ordre quelconque; on peut chercher à quelles conditions une telle équation sera, par une transformation ponctuelle ou par une transformation de contact, réductible à une équation intégrable d'un type donné.

Parmi des applications d'une nature un peu différente, je citerai une thèse

fort remarquable de M. Vessiot. J'avais, il y a quelques années, indiqué comment on pourrait étendre aux équations différentielles linéaires la théorie célèbre de Galois relative aux équations algébriques : à chaque équation linéaire on peut faire correspondre un groupe de transformations linéaire et homogène, qui est l'analogue du groupe de Galois pour les équations algébriques. M. Vessiot a développé complètement la théorie que je n'avais qu'esquissée, et parmi les applications qu'il en a faites, une des plus élégantes est la recherche des conditions pour qu'une équation linéaire s'intègre par quadratures; c'est le problème analogue à celui des équations algébriques résolubles par radicaux.

On voit que les travaux de M. Lie sont venus rajeunir singulièrement ce que l'on pourrait appeler l'ancienne théorie des équations différentielles. Ils ne peuvent, par leur nature même, conduire à des cas d'intégrations essentiellement nouveaux, puisqu'ils ont principalement pour objets des questions de transformations. Pour avoir des cas vraiment nouveaux, il est manifestement indispensable d'introduire des transcendantes nouvelles. La théorie des fonctions analytiques a fait naître à ce sujet les plus grandes espérances, et celles-ci ont été tout à fait justifiées en ce qui regarde les équations linéaires. Il n'en a pas été tout à fait de même jusqu'ici pour les équations non linéaires; dans cette voie ce sont les résultats négatifs qui ont été les plus saillants. Il en est parmi eux d'extrêmement intéressants. Ainsi, l'attention ayant été appelée par M. Fuchs sur les équations algébriques du premier ordre à points critiques fixes, M. Poincaré a montré qu'on pouvait ramener ce cas à des quadratures ou à une équation de Riccati. Dans un remarquable mémoire couronné il y a deux ans par l'Académie des Sciences, M. Painlevé a notablement étendu ces résultats, en considérant les équations du premier ordre dont les intégrales n'ont qu'un nombre limité de valeurs autour de l'ensemble des points critiques mobiles. Une des conclusions de ses recherches est que l'intégrale supposée transcendante, de toute équation algébrique du premier ordre, qui satisfait à la condition précédente, est une fonction algébrique de l'intégrale d'une équation de Riccati dont les coefficients dépendent algébriquement de ceux de l'équation donnée. On est donc assuré de ne pas obtenir par cette voie de transcendantes nouvelles; il faudra s'adresser aux équations d'ordre supérieur dont l'étude, au point de vue qui nous occupe, présente encore des difficultés considérables qui ne seront pas sans doute levées de sitôt.

Abordons maintenant une autre direction dans laquelle tend à se développer aujourd'hui la théorie des équations différentielles. Le désir bien naturel d'appliquer à ces équations les résultats obtenus par Cauchy dans la théorie des fonctions d'une variable complexe semblait avoir fait presque complètement oublier le cas où les variables et les fonctions restent réelles. C'est M. Poincaré qui, par une suite de brillants travaux, appela de nouveau l'attention sur des études si importantes pour les applications. L'étude des courbes définies par les équations différentielles offre un intérêt de premier ordre: de la connaissance générale de

la forme de ces courbes résultent les conséquences essentielles pour le problème que l'on traite, qu'il s'agisse de géométrie ou de mécanique. Il est manifeste, par exemple, que le problème des trois corps en Mécanique céleste pourrait être regardé comme résolu si l'on pouvait obtenir une connaissance générale de la forme des courbes trajectoires. Bornons-nous à un cas très simple qui montrera suffisamment l'objet des recherches de ce genre. Soit une équation du premier ordre de la forme :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

$X$  et  $Y$  étant des polynômes en  $x$  et  $y$ . M. Poincaré commence par faire l'étude des points singuliers de l'équation différentielle. Ceux-ci sont en général de trois sortes. Ce sont d'abord les *cols* par lesquels passent deux courbes intégrales et deux seulement, puis les *nœuds* où viennent passer une infinité de ces courbes et enfin les *foyers* qui sont pour les courbes intégrales des points asymptotiques. On peut exceptionnellement avoir des *centres* autour desquels les courbes intégrales se présentent sous la forme de courbes fermées s'enveloppant mutuellement et enveloppant le centre. Ces éléments ne suffisent pas pour qu'on puisse se faire une idée de la forme des courbes intégrales. Pour éviter toute difficulté relative à l'infini, faisons une projection sphérique de la figure. Si l'on chemine alors sur une courbe intégrale, qu'arrivera-t-il? Cette courbe peut être fermée de telle sorte qu'on reviendra au point de départ; elle peut aussi avoir un des foyers comme point asymptote. Il peut sembler à première vue que ce sont les seuls cas possibles; ce serait une grave erreur. La courbe considérée peut encore avoir pour courbe asymptote une courbe fermée satisfaisant d'ailleurs à l'équation différentielle. Qu'il me suffise de dire que ces courbes fermées (*Cycles limites*) jouent le rôle essentiel dans la théorie, et c'est dans les cas où il est possible de se rendre compte de leur position que la discussion de l'équation peut être faite d'une manière complète.

En restant dans le même ordre d'idées et à un point de vue seulement un peu différent, M. Poincaré a étudié, dans un mémoire célèbre, les équations différentielles de la dynamique. Je ne veux pas parler de ces belles recherches et de leur grande importance pour la Mécanique céleste; l'auteur en a fait lui-même un résumé dans cette *Revue* (\*). C'est seulement de l'intérêt qu'elles peuvent avoir pour l'Analyse générale que nous avons à nous occuper ici. Elles ont appelé l'attention sur les solutions périodiques des équations différentielles et sur les solutions asymptotiques; sans doute, M. Poincaré se trouve dans un cas spécial où il profite de la présence d'une constante très petite dans les équations, et il raisonne alors par continuité; mais on peut espérer qu'un jour, au moins dans des

---

(\*) Voir à ce sujet la *Revue* du 15 janvier 1891, t. II, page 1.

cas étendus, on trouvera quelque autre manière de pénétrer dans l'étude de ces solutions. Quoi qu'il en soit, il semble qu'il y ait dans cette direction un vaste programme de travaux à tenter; si l'on réussit dans cette voie, on y trouvera probablement des armes nouvelles pour revenir plus tard aux cas où la variable est complexe, cas où les progrès sont maintenant si difficiles.

ÉMILE PICARD,  
de l'Académie des Sciences.

---

## SUR LA THÉORIE DES SURFACES ALGÉBRIQUES;

par M. Émile Picard, à Paris.

(Dalla *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 5<sup>e</sup> année, n° 24: 30 décembre 1894).

Je devrais faire une revue sommaire des travaux d'Analyse récemment parus; mais, comme je l'ai déjà expliqué, une telle tâche me paraît impossible à remplir ici. J'aime mieux, encore cette année, prendre un sujet mieux limité et reprendre cette causerie mathématique à laquelle le directeur de la *Revue* a eu déjà deux fois l'amabilité de m'inviter (\*). J'ai choisi les surfaces algébriques, et je commence par une esquisse rapide du développement de la théorie des courbes algébriques, afin de pouvoir comparer l'état actuel des deux théories.

## I.

Prenant l'équation  $f(x, y) = 0$ , où  $f$  est un polynôme de degré  $m$  en  $x$  et  $y$ , on a d'abord classé les courbes d'après leur degré. Après la ligne droite, les courbes du second degré ont été étudiées les premières et les courbes du troisième degré n'ont pas cessé, depuis Newton, de faire l'objet des recherches des géomètres. Vinrent ensuite de nombreuses monographies de courbes particulières, mais on doit surtout citer, parmi les ouvrages d'un caractère plus général, la célèbre introduction à l'analyse des courbes algébriques de Cramer; c'est à Cramer notamment que l'on doit ce théorème si remarquable qu'une courbe irréductible de degré  $m$  ne peut avoir plus de  $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$  points doubles, nombre qui peut être effectivement atteint.

(\*) Voir les numéros de la *Revue* du 30 novembre 1890, et du 15 novembre 1892; et ces *Rendiconti*, I, V (1891), p. 80 et suiv. et I, IX (1895), p. 150 et suiv.

Malgré tous ces travaux, on peut dire qu'il n'y avait pas là encore les bases d'une véritable théorie. Le degré  $m$  de la courbe algébrique avait seul jusqu'ici joué un rôle dans la classification. Le calcul intégral allait mettre sur la voie d'un nombre fondamental dans la théorie des courbes algébriques. Le grand géomètre norvégien Abel commença l'étude des intégrales de différentielles algébriques, c'est-à-dire des intégrales de la forme:

$$(1) \quad \int^x R(x, y) dx$$

où  $R$  est une fonction rationnelle de  $x$  et de la fonction algébrique  $y$  de  $x$ . On lui doit une proposition célèbre sur les sommes d'intégrales de cette forme; dans un de ses mémoires sur ce sujet, il reconnut que la somme d'un nombre quelconque  $\mu$  d'intégrales (1), avec des limites supérieures arbitraires  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ , peut s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires et d'un *certain nombre* (dépendant seulement de la courbe) d'intégrales de même forme dont les limites sont fonctions algébriques de  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ . La mort prématurée d'Abel ne lui permit pas d'approfondir l'étude de ce nombre, et c'est à Riemann que revient la gloire d'avoir élevé, à la théorie des fonctions algébriques d'une variable, un monument qui est une des œuvres mathématiques les plus belles et les plus originales de ce siècle. Le point de départ de l'illustre géomètre est d'ailleurs tout différent de celui d'Abel; la théorie des fonctions d'une variable complexe avait été, dans l'intervalle, édifiée par Cauchy, et les singularités des fonctions algébriques étudiées par Puiseux. C'est dans la correspondance entre les systèmes de valeurs réelles ou complexes de  $x$  et  $y$ , satisfaisant à l'équation  $f(x, y) = 0$ , et une certaine surface désignée aujourd'hui sous le nom de *surface de Riemann* que se trouve l'idée fondamentale du géomètre allemand. En modifiant seulement un peu la conception primitive de Riemann, on peut s'arranger de manière que cette surface soit, dans l'espace à trois dimensions, une surface fermée  $S$ , et il y a entre les points de cette surface et les points  $(x, y)$  de la courbe  $f=0$  une correspondance bien déterminée. Or, sur une surface fermée, on peut distinguer un élément numérique très important: c'est le nombre maximum des courbes ne se coupant ni entre elles ni elles-mêmes, qu'il est possible de tracer sur la surface sans la décomposer en parties distinctes. Ainsi, pour une sphère ce nombre est nul; pour un tore, il est égal à un, et sera égal à deux pour une surface à deux trous telle qu'une cruche avec deux anses. Désignons d'une manière générale ce nombre par  $p$ : on l'appelle le *genre* de la courbe et on a:

$$(2) \quad p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d,$$

$d$  désignant le nombre des points doubles. Le genre est le nombre entrevu par Abel, et c'est une chose bien remarquable que deux ordres si différents de considérations: une réduction de sommes d'intégrales et une question de géométrie de situation conduisent au même élément. Sur la surface  $S$  on peut tracer  $2p$

courbes fermées sans fractionner la surface (ces courbes ayant par couples un point commun); ces *cycles* jouent un rôle fondamental dans l'étude des intégrales (1), ils correspondent à leurs *périodes*. Parmi ces intégrales, on désigne sous le nom d'intégrales de première espèce celles qui restent finies pour tout point  $(x, y)$ ; leur nombre est précisément égal à  $p$ . On appelle intégrales de seconde espèce celles qui n'ont pas de points singuliers logarithmiques; elles peuvent se réduire à une combinaison linéaire de  $2p$  d'entre elles et à une fonction rationnelle.

Riemann a encore introduit dans la science la notion capitale de *classe de courbes algébriques*: deux courbes appartiennent à la même classe si elles se correspondent point par point, en entendant par là que les coordonnées d'un point quelconque de la première peuvent s'exprimer rationnellement en fonction des coordonnées d'un point de la seconde, et inversement. Cette belle conception généralisait singulièrement une notion familière aux analystes qui avaient créé la théorie des formes algébriques. Deux courbes de même classe ont nécessairement le même genre, et le résultat le plus profond obtenu ici par Riemann est relatif au nombre des paramètres arbitraires dont dépend essentiellement une classe de courbes d'un genre donné  $p$ : le nombre de ces paramètres, qu'on appelle les modules, est égal à  $3p - 3$ , quand  $p$  est supérieur à un.

Le point de vue algébrique n'a pas été moins fécond que le point de vue transcendant, particulièrement entre les mains de MM. Brill et Noether. On y considère le genre comme le nombre des arbitraires figurant dans un polynôme en  $x$  et  $y$ , d'ordre  $m - 3$ , qui s'annule pour les points doubles; ceci est conforme à la formule (2). La recherche des courbes les plus simples appartenant à une classe donnée appelaît l'attention; Clebsch et Jordan avaient déjà montré qu'à toute courbe de genre  $p$  on pouvait faire correspondre une courbe de degré  $p + 1$ , théorème qui est toutefois en défaut pour une classe bien définie de courbes (les hyperelliptiques); MM. Brill et Noether ont approfondi cette théorie des courbes *normales*.

Je n'insisterai pas davantage sur la théorie, aujourd'hui classique, des fonctions algébriques d'une variable. J'en ai rappelé seulement les lignes principales pour permettre la comparaison avec celle des fonctions algébriques de deux variables, dont je vais maintenant m'occuper.

## II.

La théorie des surfaces algébriques a nécessairement débuté par des monographies particulières. Dès les premiers degrés se sont présentées des surfaces très intéressantes; les surfaces du second degré, qui se rencontrent dans tant d'applications, ont fait jadis l'objet des recherches de géomètres illustres. Puis est venue ensuite l'étude des surfaces générales du troisième degré avec les diverses dispositions que peuvent présenter leurs vingt-sept droites; les surfaces réglées du troisième ordre ont peut-être offert, avec leur droite double, le premier exemple d'une

surface ayant une ligne double, c'est-à-dire une ligne le long de laquelle se croisent deux nappes de la surface. Il faudrait une érudition qui me manque pour parler de tous les travaux relatifs aux surfaces du quatrième degré. Quelques-unes, toutefois, sont particulièrement célèbres. Ainsi, les surfaces du quatrième degré ayant une conique double ont été étudiées spécialement par M. Darboux et par M. Moutard, qui ont découvert un remarquable système triple orthogonal formé de telles surfaces. Citons ensuite la surface de Kummer qui a seize points doubles isolés; ce nombre est intéressant, car il représente le nombre maximum de points doubles que peut posséder une surface du quatrième ordre qui n'a pas de ligne double. La surface de Steiner mérite aussi d'être rappelée; elle possède trois droites doubles formant un angle trièdre dont le sommet est un point triple de la surface, et chacun de ses plans tangents la coupe suivant deux coniques.

Arrivons maintenant à la théorie générale. Nous avons signalé, pour une courbe algébrique d'ordre  $m$ , l'importance des courbes adjointes d'ordre  $m - 3$ ; Clebsch vit le premier qu'une théorie analogue était à développer pour les surfaces; il faut seulement, pour une surface d'ordre  $m$ , considérer les surfaces adjointes d'ordre  $m - 4$ , c'est-à-dire, en me bornant, pour plus de simplicité, au cas où la surface n'a que des points doubles, les surfaces d'ordre  $m - 4$  passant par les lignes doubles. L'étude de ces surfaces a été reprise par M. Noether dans un mémoire d'une grande importance où il établit le caractère invariant du nombre  $p$  de ces adjointes linéairement indépendantes; ce nombre est dit le *genre de la surface*, et il présente une grande analogie avec le nombre désigné par la même lettre dans la théorie des courbes. M. Noether a découvert pour les surfaces un second nombre invariant que nous désignerons par  $p'$ ; celui-ci représente le genre riemannien de la courbe mobile d'intersection de la surface donnée avec les surfaces adjointes d'ordre  $m - 4$ . Voici donc deux nombres fondamentaux  $p$  et  $p'$  introduits dans la théorie des surfaces algébriques.

On peut donner aussi au nombre  $p$  une origine transcendante. M. Noether considère les intégrales doubles de la forme

$$\iint \frac{Q(x, y, z) dx dy}{f'_z},$$

$Q$  étant un polynôme adjoint d'ordre  $m - 4$ . On peut les appeler des intégrales doubles de première espèce, car elles restent toujours finies, quel que soit le champ de l'intégration. Le nombre  $p$  apparaît comme le nombre des intégrales doubles de première espèce linéairement indépendantes.

Nous avons maintenant une remarque très importante à faire relativement au nombre  $p$ , remarque qui n'a pas eu son analogue dans le cas des courbes. Pour calculer  $p$ , il faudrait pouvoir calculer le nombre des arbitraires figurant dans les surfaces d'ordre  $m - 4$  et passant, avec le degré voulu de singularité, par les lignes multiples et les points multiples de la surface proposée. Or, étant donné

l'ensemble de ces lignes et de ces points, on peut trouver une telle formule pour une surface d'un ordre suffisamment grand  $N$ ; mais on ne sait rien sur la valeur minima au-dessous de laquelle la formule cesse d'être applicable. Si donc on fait dans cette formule  $N = m - 4$ , on pourra trouver un nombre  $P$  différent de  $p$ . C'est, je crois, M. Cayley qui a appelé le premier l'attention sur cette circonstance; il peut même arriver que le nombre  $P$  soit négatif, tandis que  $p$  est évidemment positif ou nul. MM. Cayley et Zethen ont montré que  $P$ , comme  $p$ , jouit de la propriété d'invariance, c'est-à-dire qu'il est le même pour les surfaces se correspondant point par point. On désigne  $p$  sous le nom de genre géométrique, et  $P$  sous le nom de genre numérique. Les surfaces réglées algébriques sont les plus simples surfaces pour lesquelles on ait  $P \neq p$ ; on a pour elles  $p=0$ , tandis que  $P$  n'est pas nul en général.

La notion de classe s'applique évidemment aux surfaces comme aux courbes. La question du nombre des modules se présente alors aussi. D'après M. Noether, pour les surfaces correspondant aux nombres  $p$  et  $p'$ , le nombre des modules est égal à  $10p + 12 - 2p'$ ; peut-être ce beau résultat aurait-il besoin d'être l'objet d'une démonstration plus rigoureuse. Il semble, en tout cas, qu'il ne s'applique qu'aux surfaces pour lesquelles on a  $P = p$ .

Nous avons considéré plus haut des intégrales doubles attachées à la surface. On peut aussi faire correspondre à une surface  $f(x, y, z) = 0$  des intégrales de différentielles totales de la forme

$$(3) \quad \int P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy,$$

où  $P$  et  $Q$  sont rationnelles en  $x$ ,  $y$  et  $z$ . J'ai commencé autrefois l'étude de ces intégrales, et je demande la permission de rappeler les résultats principaux auxquels je suis parvenu. Tout d'abord j'ai considéré les intégrales de différentielles totales de première espèce. On rencontre dès le début une différence bien profonde entre le cas d'une variable et celui de deux variables. La courbe la plus générale d'un degré donné possède un certain nombre d'intégrales de première espèce. Il en est tout autrement pour les surfaces algébriques, car il n'existe pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce correspondant à la surface la plus générale de degré  $m$ . J'ai montré comment on pourrait reconnaître si une surface donnée possède des intégrales de première espèce. J'ai abordé aussi la question, beaucoup plus difficile, des intégrales de seconde et de troisième espèce; j'entends par intégrales de seconde espèce celles qui n'ont que des courbes polaires (analogues aux pôles des intégrales de seconde espèce), les intégrales de troisième espèce ayant, en plus, des courbes logarithmiques. Pour la surface la plus générale de son degré, toute intégrale de seconde espèce est une fonction rationnelle des coordonnées, et le problème de reconnaître si une surface donnée admet des intégrales de seconde espèce non rationnelles ne laisse pas d'être assez délicat; d'ailleurs, quand il existe de telles intégrales, le nombre de ces intégrales distinctes est égal au nombre de leurs périodes. Quant aux intégrales de troisième espèce,

on peut rattacher leur théorie à celle des intégrales de seconde espèce; mais, bien des points demanderaient encore à être approfondis. J'ai même dû laisser en suspens une question qui se pose pourtant dès le début; il ne me paraît guère douteux que, pour la surface la plus générale de son degré, toutes les intégrales de la forme (3) doivent se réduire à la somme d'une fonction rationnelle de  $x$ ,  $y$ ,  $\zeta$  et de logarithmes de telles fonctions multipliés par des constantes, mais je n'en possède pas une démonstration rigoureuse.

Nous avons dit plus haut comment Riemann avait introduit dans la théorie des courbes des points de vue empruntés à la géométrie de situation. Aucune recherche analogue n'avait été tentée pour les surfaces, et, d'autre part, mes précédentes études sur les intégrales de différentielles totales me montraient là une lacune à combler. J'eus donc tout naturellement la pensée de chercher à poser les bases d'une théorie des *cycles* dans les surfaces. Je fus ainsi conduit à remarquer que la généralisation peut se faire dans deux directions différentes; il y a à considérer, pour les surfaces, des cycles à une dimension ou *linéaires* et des cycles à deux dimensions; d'où deux théories entièrement distinctes. En pénétrant dans la première étude, on rencontre un résultat au premier abord inattendu: c'est qu'en général il n'y a pas de cycles linéaires, c'est-à-dire qu'ils se réduisent à des cycles nuls, et ce résultat donne la véritable raison du fait signalé plus haut qu'il n'y a pas, en général, d'intégrales de première et de seconde espèce. Si le nombre  $p_1$  des cycles linéaires est nul généralement, il en est autrement pour le nombre  $p_2$  des cycles à deux dimensions, et c'est, par suite, dans les cycles à deux dimensions d'une surface qu'il faut chercher la généralisation des cycles d'une courbe algébrique.

Mes recherches sur les intégrales de différentielles totales m'ont permis d'aborder l'étude d'une classe intéressante de surfaces: ce sont les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres, et cela de telle manière qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs de deux paramètres, abstraction faite des multiples des périodes. J'ai établi que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface jouisse de cette propriété est qu'elle soit de genre *un* ( $p = 1$ ) et possède deux intégrales distinctes de première espèce. Avant le sixième degré, il n'existe pas de surface de la classe précédente; on en peut trouver pour le sixième degré, mais les fonctions quadruplement périodiques se ramènent aux fonctions doublement périodiques.

Dans un mémoire extrêmement intéressant, couronné il y a deux ans par l'Académie, M. Humbert a approfondi l'étude des surfaces précédentes et établi des théorèmes d'une rare élégance. Parmi les résultats relatifs aux surfaces adjointes, citons au moins celui qui concerne les adjointes d'ordre  $m - 3$ : le nombre de ces adjointes linéairement distinctes est égal au genre des sections planes de la surface diminué d'une unité. Signalons encore que le genre numérique  $P$  est égal à  $-1$  et est, par suite, distinct du genre géométrique. M. Humbert étudie

aussi des surfaces remarquables d'ordre *huit*, ayant pour lignes doubles les arêtes d'un tétraèdre, qui sont jusqu'ici les surfaces de moindre degré correspondant à des fonctions hyperelliptiques non réductibles aux fonctions doublement périodiques. D'après ce que j'ai dit plus haut, il resterait à voir s'il existe de telles surfaces pour les degrés *six* et *sept*; il est bien vraisemblable que *huit* est le degré minimum.

M. Humbert s'est aussi occupé, dans son mémoire, de la surface de Kummer, qui se rattache aux fonctions quadruplement périodiques, mais ne rentre pas dans la famille précédente: car à un point arbitraire de la surface correspondent deux valeurs des paramètres, aux périodes près; il fait une étude très complète des courbes tracées sur la surface et des propriétés des surfaces passant par ces courbes.

D'une manière générale, l'étude des courbes algébriques tracées sur une surface est un point très important de la théorie. Dans leurs célèbres mémoires de 1880, Halphen et M. Noether ont donné à ce sujet quelques propositions générales. Ce sont surtout les systèmes continus de courbes tracées sur une surface qui ont fait, dans ces derniers temps, l'objet de travaux importants, particulièrement en Italie, avec MM. Guccia, Segre, Bertini, Castelnuovo, Enriques, etc. Les systèmes linéaires de courbes sont particulièrement intéressants. On désigne sous ce nom un système de courbes découpées (totalement ou partiellement) sur  $F$  par les surfaces d'un système linéaire. M. Enriques a remarqué qu'un système de courbes dépendant de  $r$  paramètres et découpées totalement ou partiellement sur  $F$  par les surfaces d'un système algébrique (on ne dit pas *linéaire*), est nécessairement linéaire si  $r$  est supérieur à *un*, et si par  $r$  points généraux de  $F$  passe une seule courbe du système. Tout récemment, M. Humbert s'est occupé des séries simplement infinies de courbes sur une surface, et il a montré qu'une telle série de courbes, se coupant deux à deux en un ou plusieurs points mobiles, est comprise dans une série linéaire (deux fois infinie au moins) de courbes du même ordre, pourvu que la surface ne possède pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce; on entend ici par série linéaire de courbes des courbes découpées par les surfaces d'un système linéaire, chaque surface mobile ne coupant la proposée, en dehors de courbes fixes, que suivant une seule courbe mobile.

Les surfaces appelées *unicursales*, pour lesquelles les coordonnées s'expriment en fonctions rationnelles de deux paramètres, ont fait depuis Clebsch l'objet de nombreux travaux. Une lacune importante subsistait dans cette théorie. Peut-on, pour une telle surface, faire la représentation paramétrique de manière qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs des deux paramètres? Cette question très délicate restait en suspens; nous savons maintenant, grâce à M. Castelnuovo, qu'elle doit être résolue par l'affirmative. On peut déduire de là que, si une surface contient une simple infinité de courbes rationnelles, infinité dépendant rationnellement d'un paramètre, elle est *unicursive*.

Quelques travaux ont encore été consacrés récemment à l'étude des surfaces d'après le genre de leurs sections planes. J'avais cherché autrefois les surfaces dont toutes les sections planes sont unicursales et montré qu'elles se réduisent aux surfaces réglées unicursales et à la surface de Steiner. M. Castelnuovo a cherché les surfaces dont toutes les sections planes sont de genre un et il a établi que ces surfaces sont unicursales ou réglées. M. Enriques est arrivé à la même conclusion pour les surfaces dont les sections sont des courbes hyperelliptiques de genre quelconque. Rappelons encore, dans le même ordre d'idées, un théorème énoncé en 1886 par Kronecker et que vient d'établir M. Castelnuovo, d'après lequel les seules surfaces irréductibles admettant une double infinité de sections planes décomposables en deux courbes distinctes sont les surfaces réglées et la surface de Steiner.

L'étude des transformations d'une surface en elle-même, au moyen de transformations birationnelles, est importante pour la théorie qui nous occupe. Il y a ici encore une grande différence entre le cas des courbes et celui des surfaces. Tandis qu'une transformation birationnelle d'une courbe en elle-même, dépendant de paramètres arbitraires, fait nécessairement partie d'un groupe fini et continu au sens de M. Lie, il peut en être autrement pour les surfaces. J'ai pu étudier le cas des surfaces admettant un groupe fini et continu de transformations birationnelles; mais les cas où celles-ci ne forment pas un groupe paraissent d'un bien autre intérêt.

On voit que, malgré tant de travaux et particulièrement ceux de M. Noether qui ont tant contribué aux progrès de la théorie générale des surfaces algébriques, celle-ci est loin d'être aussi avancée que celle des courbes. Il semble que d'autres nombres invariants que ceux qui ont été jusqu'ici considérés soient à introduire. Ainsi, il y a un grand nombre de classes de surfaces pour lesquelles il n'y a rien à tirer de la notion de genre géométrique; j'ai lieu d'espérer qu'au moins dans des cas étendus, un nouvel invariant sur lequel j'ai récemment appelé l'attention et d'autres nombres analogues pourront n'être pas dénués d'intérêt.

ÉMILE PICARD,  
de l'Académie des Sciences,  
Professeur de Calcul différentiel et intégral  
à la Faculté des Sciences de Paris.

## SULLE INVOLUZIONI DI SPECIE QUALUNQUE.

Nota di F. Gerbaldi, in Palermo.

Adunanza dell'11 novembre 1894. — Verbali.

Il prof. Guccia ha in questi Rendiconti dimostrato in più modi che l'abbassamento prodotto di una singolarità ordinaria  $[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k]$  nel numero dei punti  $(k+1)$ -pli di un'involuzione di specie  $k$  è in generale

$$L_k = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Parmi utile rilevare che l'ultima dimostrazione (t. VIII, pp. 228-230) si può estendere in guisa che nello enunciato precedente sia licito sostituire la parola *sempre* alla parola *in generale*. Basta a quest'uopo far vedere che

$$\Phi = \begin{vmatrix} \varphi_n & \varphi_{n-\sigma_1} & \dots & \varphi_{n-\sigma_k} \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_{n-\sigma_1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{n-\sigma_k}}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^k \varphi_n}{\partial x_1^k} & \frac{\partial^k \varphi_{n-\sigma_1}}{\partial x_1^k} & \dots & \frac{\partial^k \varphi_{n-\sigma_k}}{\partial x_1^k} \end{vmatrix}$$

in niun caso si può annullare per  $x_1 = 0$ .

Pongasi per brevità

$$n - \sigma_i = \pi_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

ed i coefficienti delle più alte potenze di  $x_1$  nei polinomi  $\varphi_n, \varphi_{n-\sigma_1}, \dots, \varphi_{n-\sigma_k}$  si denotino rispettivamente con  $a_0, a_1, \dots, a_k$ . Indi si premetano le seguenti osservazioni:

1° dalle disugaglianze

$$1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k \leq n$$

seguono le altre

$$n > n_1 > n_2 > \dots > n_k;$$

2º n'uno dei coefficienti  $a_0, a_1, \dots, a_k$  può essere nullo; perchè, se fosse  $a_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), il polinomio  $\varphi_{n-\tau_i}$  avrebbe  $x_i$  come fattore, donde segue che nell'involuzione minore  $I_n^{k-i}$  il punto  $x_i = 0$  sarebbe un punto base con una molteplicità maggiore di  $\sigma_i$ , il che è contro l'ipotesi circa la natura della singolarità del punto  $x_i = 0$ ; nè è  $a_0 = 0$ , altrimenti il punto  $x_i = 0$  sarebbe un punto base per l'involuzione  $I_n^k$  data, ciò che si esclude.

Ciò posto, si calcoli il valore di  $\Phi$  per  $x_1 = 0, x_2 = 1$ ; esso è

$$\begin{vmatrix} a_0 & & & & & \dots \\ n a_0 & & & & & \dots \\ n(n-1) a_0 & & & & & \dots \\ \dots & & & & & \dots \\ n(n-1) \dots (n-k+1) a_0 & n_1(n_1-1) a_1 & & & & \dots \end{vmatrix}$$

Questo determinante si riduce facilmente con operazioni fatte sulle orizzontali ad un determinante di Vandermonde, ed è uguale a

$$\pm a_0 a_1 \dots a_k (n - n_1) \dots (n - n_k) (n_1 - n_2) \dots (n_1 - n_k) \dots (n_{k-1} - n_k).$$

Dunque, per  $x_1 = 0$ ,  $\Phi$  si riduce ad un prodotto di fattori, i quali per le osservazioni premesse sono tutti diversi da zero.

Fossano, 27 agosto 1894.

F. GERBALDI.

SULLE TRASFORMAZIONI DELLE EQUAZIONI  
DELLA DINAMICA.

Nota del Dr. Giovanni Di Pirro, in Roma.

Adunanza del 10 marzo 1895.

1. I lavori del sig. Appell sulla « Omografia in Meccanica » condussero il sig. Goursat a proporre la seguente questione:  
Dato il sistema di equazioni di Lagrangia

$$(A) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial p'_r} \right) - \frac{\partial S}{\partial p_r} = P_r, \quad \frac{dp_r}{dt} = p'_r \quad (r=1, 2, \dots n)$$

dove  $S = \frac{1}{2} \sum_n a_n p'_r p'_r$  ( $a_n = a_{nr}$ ) è una funzione quadratica omogenea delle  $p'_1, p'_2, \dots p'_n$  coi coefficienti funzioni delle  $p_1, p_2, \dots p_n$ , e dove le  $P_r$  contengono soltanto le  $p_1, p_2, \dots p_n$ ; trovare delle funzioni  $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$  e  $\lambda$  tali che, ponendo

$$(1) \quad \begin{cases} q_r = \varphi_r(p_1, p_2, \dots p_n) \\ dt = \lambda(p_1, p_2, \dots p_n) dt_1, \end{cases}$$

sia possibile trasformare il dato sistema nell'altro

$$(B) \quad \frac{d}{dt_1} \left( \frac{\partial S_1}{\partial q'_r} \right) - \frac{\partial S_1}{\partial q_r} = Q_r, \quad \frac{dq_r}{dt_1} = q'_r \quad (r=1, 2, \dots n)$$

dove  $S_i = \frac{1}{2} \sum_n b_n q'_i q'_i$  ( $b_n = b_{ni}$ ) è una funzione quadratica omogenea delle  $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$  coi coefficienti funzioni delle sole  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , e dove le  $\mathcal{Q}_i$  contengono soltanto le  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

Un caso particolarmente interessante di tale questione si ha in quello recentemente studiato dal sig. Painlevé in una lunga Memoria, pubblicata nel « Journal de Mathématiques pures et appliquées » (1° fasc. 1894), relativo alle trasformazioni definite dalle formole :

$$(2) \quad \begin{cases} p_r = q_r \\ dt = \lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) dt_1. \end{cases}$$

È il caso nel quale le traiettorie definite dai sistemi (A) e (B) hanno le medesime equazioni, pur essendo sopra esse diverso il movimento.

Su questo soggetto il sig. Painlevé ha dimostrati parecchi importanti teoremi, non però tali da esaurire l'argomento, né tali da dare un concetto della entità di queste trasformazioni, e del contributo che esse possono apportare alla risoluzione dei problemi della Meccanica.

La questione, invero, allora potrà dirsi completamente risolta, quando sia determinata la funzione  $\lambda$  e siano determinate altresì le condizioni, a cui devono soddisfare i coefficienti  $a_{ni}, b_{ni}$ , perchè la trasformazione sia attuabile.

Partendo da queste considerazioni, io mi propongo di risolvere compiutamente il problema trattato dal sig. Painlevé nel caso che le espressioni delle semiorse vive  $S$  ed  $S_i$  siano riducibili alla *forma ortogonale*, e nel caso che le forze  $P_r(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $\mathcal{Q}_r(q_1, q_2, \dots, q_n)$  siano affatto arbitrarie.

2. Allo scopo di stabilire alcune formole preliminari, è intanto necessario osservare con Stäckel (\*) che, quando si sviluppino i primi membri delle equazioni (A) e (B) e si tenga conto della tra-

---

(\*) Journal de Crelle, t. 110.

sformazione (1), si possono trovare dei coefficienti  $R_r^{(i)}$  in numero di  $n^2$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ) non dipendenti che da  $p_1, p_2, \dots, p_n$  in maniera che le espressioni

$$(3) \quad \frac{d}{dt_i} \left( \frac{\partial S_i}{\partial q'_r} \right) - \frac{\partial S_i}{\partial q_r} - \sum_{k=1}^{n^2} R_r^{(i)} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial p'_k} \right) - \frac{\partial S}{\partial p_k} \right]$$

non contengano più le derivate seconde e si riducano in conseguenza a delle forme quadratiche  $\Phi_r$  di  $p'_1, p'_2, \dots, p'_n$ .

Basterà annullare nella espressione (3) il coefficiente di  $\frac{d^2 p_k}{dt^2}$ : con che si avrà

$$(4) \quad \lambda^2 \left[ b_{rr} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_k} + b_{rr} \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_k} + \dots + b_{rr} \frac{\partial \varphi_n}{\partial p_k} \right] - \sum_{i=1}^{n^2} R_r^{(i)} a_{ki} = 0.$$

Facendo  $k = 1, 2, \dots, n$  si avranno  $n$  equazioni lineari definienti  $R_r^{(1)}, R_r^{(2)}, \dots, R_r^{(n)}$  nelle quali il determinante dei coefficienti delle  $R$  è il discriminante di  $S$ , che perciò non è nullo.

Calcolate le  $R$ , la espressione (3) diventa uguale ad una forma quadratica  $\Phi_r$  delle  $p'_1, p'_2, \dots, p'_n$ ; e si avranno tra le forze  $P_r$  e le  $Q_r$  le relazioni:

$$(5) \quad Q_r = \Phi_r + \sum_{i=1}^{n^2} R_r^{(i)} P_i.$$

Da questa formola si deduce che quando le funzioni  $\lambda$  e  $\varphi_r$  sono scelte arbitrariamente a forze  $P_r$  funzioni delle sole coordinate corrispondono delle forze  $Q_r$  funzioni e delle coordinate e delle velocità.

Se noi però vogliamo che le forze  $Q_r$  siano dipendenti soltanto dalle posizioni, occorrerà che la trasformazione sia particolarizzata dalle condizioni:

$$(6) \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \dots, \quad \Phi_n = 0.$$

Ora, volendo che queste condizioni sieno soddisfatte per tutti

i movimenti possibili del sistema, bisogna che le equazioni (6) abbiano luogo quali che sieno  $p'_1, p'_2, \dots p'_n$ , e che quindi i coefficienti delle diverse potenze delle  $p'$  siano uguali a zero.

Si avrà così un numero più grande di equazioni definenti le  $\phi$ , e  $\lambda$ . Queste equazioni saranno generalmente in numero maggiore delle funzioni a determinarsi: di modo che non si potrà realizzare la trasformazione, senza che esistano certe relazioni tra i coefficienti  $a_{rr}, b_{rr}$  delle forme  $S$  ed  $S_i$ .

Allorquando questa trasformazione esiste, a forze  $P$  nulle corrispondono forze  $Q$  nulle.

La trasformazione quindi conserva i movimenti geodetici.

3. Ciò posto, veniamo alla risoluzione del problema che ci occupa.

Trascriviamo i sistemi (A) e (B) che chiameremo d'ora innanzi ( $S$ ) ed ( $S_i$ ):

$$(S) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial p'_r} \right) - \frac{\partial S}{\partial p_r} = P_r; \quad S = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2}$$

$$(S_i) \quad \frac{d}{dt_i} \left( \frac{\partial S}{\partial q'_r} \right) - \frac{\partial S}{\partial q_r} = Q_r; \quad S_i = \frac{1}{2} \frac{ds_i^2}{dt_i^2},$$

e supponiamo che sia

$$ds^2 = \sum_{r=1}^{n+1} a_{rr} dp_r^2, \quad ds_i^2 = \sum_{r=1}^{n+1} b_{rr} dq_r^2.$$

Diremo *corrispondenti* i sistemi ( $S$ ) ed ( $S_i$ ) e *corrispondenti* pure gli elementi lineari  $ds, ds_i$ .

Ferme rimanendo le condizioni ammesse per (A) e (B), mi propongo di vedere quale debba essere la forma delle  $a_{rr}, b_{rr}$ , e quale la forma di  $\lambda$ , perché il sistema ( $S$ ) si trasformi nel sistema ( $S_i$ ) mediante le formole:

$$\begin{cases} q_r = p_r \\ dt = \lambda(p_1, p_2, \dots p_n) dt_i. \end{cases}$$

Tenuta ragione delle ipotesi fatte, le equazioni (4) danno nel nostro caso :

$$\lambda^2 b_{rr} = R_r^{(r)} a_{rr},$$

da cui

$$R_r^{(r)} = \lambda^2 \frac{b_{rr}}{a_{rr}},$$

ed

$$R_r^{(1)} = R_r^{(2)} = \dots R_r^{(r-1)} = R_r^{(r+1)} = \dots = R_r^{(n)} = 0.$$

Le equazioni (5) diventano :

$$Q_r = \Phi_r + \lambda^2 \frac{b_{rr}}{a_{rr}} P_r.$$

E se per  $P_r$  e  $Q_r$  poniamo i valori che si cavano dai primi membri dei sistemi ( $S$ ) ed ( $S_i$ ), le equazioni (6) daranno luogo al sistema :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\partial b_{rr}}{\partial p_r} + \lambda b_{rr} \frac{\partial \lambda}{\partial p_r} - \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{b_{rr}}{a_{rr}} \frac{\partial a_{rr}}{\partial p_r} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, n) \\ \lambda^2 \frac{\partial b_{rs}}{\partial p_s} + \lambda b_{rs} \frac{\partial \lambda}{\partial p_s} - \lambda^2 \frac{b_{rs}}{a_{rs}} \frac{\partial a_{rs}}{\partial p_s} = 0, \quad \begin{cases} r = 1, 2, \dots, n \\ s = 1, 2, \dots, n \quad r \neq s \end{cases} \\ \frac{b_{rr}}{a_{rr}} \frac{\partial a_{rs}}{\partial p_r} - \frac{\partial b_{rs}}{\partial p_r} = 0. \quad \begin{cases} r = 1, 2, \dots, n \\ s = 1, 2, \dots, n \quad r \neq s \end{cases}. \end{array} \right.$$

Si vede di qui che la risoluzione del problema è ricondotta alla integrazione del sistema (7) formato da  $n(2n - 1)$  equazioni differenziali.

Integriamolo :

La 1<sup>a</sup> equazione si può scrivere :

$$\frac{\partial}{\partial p_r} (\log b_{rr}) + \frac{\partial}{\partial p_r} (\log \lambda^2) - \frac{\partial}{\partial p_r} (\log a_{rr}) = 0$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial p_r} \left( \log \lambda^2 \frac{b_{rr}}{a_{rr}} \right) = 0;$$

da cui

$$\lambda^2 \frac{b_{rr}}{a_{rr}} = F_r(p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_{r+1}, \dots, p_n),$$

dove  $F_r$  è il simbolo di una funzione arbitraria che non contiene la  $p_r$ .

La 2<sup>a</sup> equazione si può anche scrivere

$$\frac{\partial}{\partial p_s} (\log b_{rr}) + \frac{\partial}{\partial p_s} (\log \lambda) - \frac{\partial}{\partial p_s} (\log a_{rr}) = 0$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial p_s} \left( \log \lambda \frac{b_{rr}}{a_{rr}} \right) = 0,$$

la quale equazione, valendo per

$$s = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n$$

dà

$$\lambda \frac{b_{rr}}{a_{rr}} = \frac{1}{\Pi_r(p_r)},$$

dove la  $\Pi_r(p_r)$  è una funzione arbitraria della sola  $p_r$ .

Tenendo conto di questo risultato l'equazione :

$$\lambda^2 \frac{b_{rr}}{a_{rr}} = F(p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_{r+1}, \dots, p_n)$$

diventa

$$\frac{\lambda}{\Pi_r(p_r)} = F(p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_{r+1}, \dots, p_n),$$

la quale valendo per  $r = 1, 2, \dots, n$  contiene le altre

$$(8) \lambda = \Pi_1(p_1)F_1 = \Pi_2(p_2)F_2 = \dots = \Pi_{r-1}(p_{r-1}) = \Pi_r(p_r)F_r = \dots = \Pi_n(p_n)F_n.$$

Portiamo ora la nostra attenzione sopra l'eguaglianza

$$\Pi_{r-1}(p_{r-1})F_{r-1} = \Pi_r(p_r)F_r$$

che possiamo scrivere

$$\frac{F_r}{\Pi_{r-1}(p_{r-1})} = \frac{F_{r-1}}{\Pi_r(p_r)};$$

ed osserviamo che, per la natura della funzione  $F_r$ , il primo membro non contiene la  $p_r$ , per la natura della funzione  $F_{r-1}$ , il secondo membro non contiene la  $p_{r-1}$ . Perchè dunque l'uguaglianza possa aver luogo è necessario che i due membri siano uguali ad una certa funzione

$$\varphi_{r,r-1}(p_1, p_2, \dots, p_{r-2}, p_{r+1}, \dots, p_n),$$

che non contenga né la  $p_{r-1}$ , né la  $p_r$ .

Avvalendoci di questa considerazione possiamo allora dal sistema (8) dedurre le seguenti relazioni :

$$\frac{F_r}{\Pi_1} = \frac{F_1}{\Pi_r} = \varphi_{r1}(p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_{r+1}, \dots, p_n)$$

$$\frac{F_r}{\Pi_2} = \frac{F_2}{\Pi_r} = \varphi_{r2}(p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_{r+1}, \dots, p_n)$$

.....

$$\frac{F_r}{\Pi_{r-1}} = \frac{F_{r-1}}{\Pi_r} = \varphi_{r,r-1}(p_1, p_2, \dots, p_{r-2}, p_{r+1}, \dots, p_n)$$

.....

$$\frac{F_r}{\Pi_n} = \frac{F_n}{\Pi_r} = \varphi_{rn}(p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_{r+1}, \dots, p_{n-1}),$$

dove le  $\varphi$  sono simboli di funzioni arbitrarie e gli indici  $r, s$  nella

funzione  $\varphi_r$ , stanno ad indicare che in essa mancano le variabili  $p_r$  e  $p_s$ .

Ora da queste relazioni si rileva che la

$$F_r$$

(indipendente dalla  $p_r$ ) è tale funzione che il quoziente della divisione di essa per  $\Pi_1(p_1)$  è indipendente da  $p_1$ , il quoziente per  $\Pi_2(p_2)$  è indipendente da  $p_2$ , ..., il quoziente per  $\Pi_n(p_n)$  è indipendente da  $p_n$ .

Dunque essa è necessariamente della forma

$$F_r = C \cdot \Pi_1(p_1) \cdot \Pi_2(p_2) \cdots \Pi_{r-1}(p_{r-1}) \cdot \Pi_{r+1}(p_{r+1}) \cdots \Pi_n(p_n)$$

essendo  $C$  una costante arbitraria.

Questa espressione farà conoscere la forma delle  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , quando in essa si faccia successivamente

$$r = 1, 2, \dots, n.$$

Tenendo conto di questi risultati e del sistema (8) segue per  $\lambda$  il valore

$$\lambda = C \Pi_1(p_1) \cdot \Pi_2(p_2) \cdots \Pi_n(p_n).$$

E quindi dalla

$$\lambda \frac{b_{rr}}{a_{rr}} = \frac{1}{\Pi_r(p_r)}$$

si cava

$$b_{rr} = \frac{a_{rr}}{C \cdot \Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_{r-1} \Pi_r^2 \Pi_{r+1} \cdots \Pi_n}.$$

Dopo ciò, risolviamo il sistema contenuto nella 3ª equazione del sistema (7), che è

$$\frac{b_{rr}}{a_{rr}} \frac{\partial a_{ss}}{\partial p_r} - \frac{\partial b_{ss}}{\partial p_r} = 0. \quad (r = 1, 2, \dots, n \quad r \neq s).$$

Sostituendo in questa per  $b_r$  e  $b_u$  i valori trovati, si ha

$$\frac{\frac{1}{\Pi_r^2} \frac{\partial a_u}{\partial p_r}}{\frac{1}{\Pi_r} \frac{\partial a_u}{\partial p_r}} = \frac{\Pi_r \frac{\partial a_u}{\partial p_r} - a_u \frac{\partial \Pi_r}{\partial p_r}}{\Pi_r^2},$$

ossia

$$(\Pi_r - \Pi_s) \frac{\partial a_u}{\partial p_r} = a_u \frac{\partial \Pi_r}{\partial p_r},$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial p_r} (\log a_u) = \frac{\partial}{\partial p_r} [\log (\Pi_r - \Pi_s)].$$

Da quest'ultima integrando si cava :

$$a_u = (\Pi_r - \Pi_s) \psi_r,$$

dove  $\psi_r$  indica una funzione indipendente dalla  $p_r$ .

Ponendo successivamente nella formola così dedotta

$$r = 1, 2, \dots n$$

si ottengono le relazioni :

$$a_u = (\Pi_1 - \Pi_s) \psi_1, \text{ essendo } \psi_1 \text{ indipendente da } p_1$$

$$a_u = (\Pi_2 - \Pi_s) \psi_2, \quad \rightarrow \quad \psi_2 \quad \rightarrow \quad p_2$$

..... , .....

$$a_u = (\Pi_r - \Pi_s) \psi_r, \quad \rightarrow \quad \psi_r \quad \rightarrow \quad p_r$$

..... , .....

$$a_u = (\Pi_n - \Pi_s) \psi_n, \quad \rightarrow \quad \psi_n \quad \rightarrow \quad p_n.$$

Per queste relazioni si deduce che la  $a_u$  contiene la  $p_r$  nel solo fattore  $\Pi_r - \Pi_s$ , e che perciò dev'essere della forma

$$a_u = (\Pi_1 - \Pi_s)(\Pi_2 - \Pi_s) \dots (\Pi_r - \Pi_s) \dots (\Pi_n - \Pi_s) P_r^{(1)},$$

dove la  $P_r^{(1)}$  è una funzione arbitraria della sola  $p_r$ . Ora, senza ledere

la generalità dei risultati, si può supporre  $P_r^{(r)} = 1$ , poichè ciò equivale a sostituire alle  $p_r$  altre variabili  $p^{(r)}$  legate alle prime dalle relazioni :

$$p^{(r)} = \int V \bar{P}_r^{(r)} dp_r.$$

Riterremo quindi

$$a_{rr} = (\Pi_1 - \Pi_r)(\Pi_2 - \Pi_r) \dots (\Pi_r - \Pi_r) \dots (\Pi_n - \Pi_r). \quad (r \neq r)$$

Sostituendo questo valore di  $a_{rr}$  nella espressione trovata per  $b_{rr}$ , si ottiene :

$$b_{rr} = \frac{(\Pi_1 - \Pi_r)(\Pi_2 - \Pi_r) \dots (\Pi_r - \Pi_r) \dots (\Pi_n - \Pi_r)}{\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{r-1} \Pi_r^2 \Pi_{r+1} \dots \Pi_n}. \quad (r \neq r)$$

È da osservare intanto che il valore di  $a_{rr}$  non cangia quando in luogo delle  $\Pi_r$  si ponga  $\Pi_r + b$ , essendo  $b$  una costante.

Per contrario  $b_{rr}$  diventa una funzione di  $b$  e varia col variare di  $b$ .

Quindi per ogni valore di  $a_{rr}$  soddisfacente al sistema di equazioni integrato corrispondono infiniti valori di  $b_{rr}$  soddisfacenti tutti al medesimo sistema.

Quanto si è detto ci permette di enunciare la seguente proposizione :

*Se le espressioni delle semiorze vive  $S$  ed  $S_i$  sono riducibili a forma ortogonale, il sistema ( $S$ ) di equazioni di Lagrangia si potrà con le formole*

$$q_r = p_r$$

$$dt = \lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) dt_i$$

*trasformare nel sistema ( $S_i$ ), quando, posto*

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \sum_{r=1}^n a_{rr} \left( \frac{dp_r}{dt} \right)^2,$$

$$S_i = \frac{1}{2} \left( \frac{ds_i}{dt_i} \right)^2 = \sum_{r=1}^n b_{rr} \left( \frac{dq_r}{dt} \right)^2 = \sum_{r=1}^n b_{rr} \left( \frac{dp_r}{dt} \right)^2,$$

si abbia rispettivamente

$$a_r = (\Pi_1 - \Pi_r)(\Pi_2 - \Pi_r) \dots (\Pi_n - \Pi_r)$$

$$b_r = \frac{(\Pi_1 - \Pi_r)(\Pi_2 - \Pi_r) \dots (\Pi_n - \Pi_r)}{C(\Pi_1 + b)(\Pi_2 + b) \dots (\Pi_{r-1} + b)(\Pi_r + b)^2(\Pi_{r+1} + b) \dots (\Pi_n + b)}$$

e si abbia altresì

$$\lambda = C(\Pi_1 + b)(\Pi_2 + b) \dots (\Pi_n + b).$$

In tal caso, e solo in tal caso, la trasformazione proposta a forze  $P_r$  del sistema ( $S$ ), funzioni delle sole coordinate, farà corrispondere forze  $Q_r$  del sistema ( $S_r$ ), funzioni del pari delle sole coordinate.

E la dipendenza fra le  $P_r$  e le  $Q_r$  è definita dalle formole:

$$Q_r = \lambda^2 \frac{b_r}{a_r} P_r$$

ossia dalle:

$$(9) Q_r = C(\Pi_1 + b)(\Pi_2 + b) \dots (\Pi_{r-1} + b)(\Pi_{r+1} + b) \dots (\Pi_n + b) P_r, \\ (r = 1, 2, \dots, n)$$

4. Studiamo ora un caso particolare importante di queste trasformazioni.

Supponiamo che le  $P_r$  derivino da una funzione potenziale  $U$ , per cui si abbia

$$P_r = \frac{\partial U}{\partial p_r}.$$

Da questa ipotesi non consegue necessariamente che le  $Q_r$  debbano pur esse ammettere un potenziale: ciò in generale non sarà.

Si può però domandare:

*Esistono forme della funzione  $U$ , per cui, essendo  $P_r = \frac{\partial U}{\partial p_r}$ , sia pure  $Q_r = \frac{\partial U}{\partial p_r}$ ?*

Perchè ciò sia, occorre che l'espressione

$$Q_1 dp_1 + Q_2 dp_2 + \dots + Q_n dp_n$$

sia un differenziale esatto e che quindi si abbia :

$$\frac{\partial Q_r}{\partial p_s} = \frac{\partial Q_s}{\partial p_r}. \quad (r=1, 2, \dots, n; s=1, 2, \dots, n; r \neq s)$$

Ora

$$Q_r = C(\Pi_1 + b)(\Pi_2 + b) \dots (\Pi_{r-1} + b)(\Pi_{r+1} + b) \dots (\Pi_n + b) \frac{\partial U}{\partial p_r}$$

$$Q_s = C(\Pi_1 + b)(\Pi_2 + b) \dots (\Pi_{s-1} + b)(\Pi_{s+1} + b) \dots (\Pi_n + b) \frac{\partial U}{\partial p_s}.$$

Quindi la

$$\frac{\partial Q_r}{\partial p_s} = \frac{\partial Q_s}{\partial p_r}$$

dà

$$\frac{\partial}{\partial p_s} \left[ (\Pi_r + b) \frac{\partial U}{\partial p_r} \right] = \frac{\partial}{\partial p_r} \left[ (\Pi_s + b) \frac{\partial U}{\partial p_s} \right]$$

ossia

$$(10) \quad \frac{\partial^2 (\Pi_r - \Pi_s) U}{\partial p_r \partial p_s} = 0. \quad (r=1, 2, \dots, n; s=1, 2, \dots, n; r \neq s)$$

La determinazione della funzione  $U$  è così ridotta alla integrazione del sistema (10).

Per effettuare una tale integrazione consideriamo le  $n$  seguenti equazioni :

$$\frac{\partial^2 (\Pi_r - \Pi_1) U}{\partial p_r \partial p_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 (\Pi_r - \Pi_2) U}{\partial p_r \partial p_2} = 0$$

$$\frac{\partial^a (\Pi_i - \Pi_j) U}{\partial p_i \partial p_j} = 0$$

$$\frac{\partial^2 (\Pi_r - \Pi_s) U}{\partial p_r \partial p_s} = 0$$

$$\frac{\partial^2 (\Pi_r - \Pi_u)}{\partial p_r \partial p_u} = 0.$$

**Queste equazioni, integrate, danno:**

$$(\Pi_r - \Pi_1) U = \varphi_r^{(1)}(p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_{r+1}, \dots, p_n) + \\ + \varphi_r^{(r)}(p_2, p_3, \dots, p_n)$$

$$(\Pi_r - \Pi_s) U = \varphi_r^{(r)}(p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_{r+1}, \dots, p_n) + \\ + \varphi_s^{(r)}(p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_{r+1}, \dots, p_n)$$

$$(\Pi_r - \Pi_n) U = \varphi_r^{(u)}(p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_{r+1}, \dots, p_n) + \\ + \varphi_n^{(v)}(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}),$$

dove  $\varphi^{(r)}$  è il simbolo di una funzione arbitraria delle variabili, in cui l'indice  $r$  sta ad indicare che in essa manca la variabile  $p_r$ .

Ora dall'esame delle relazioni precedenti si scorge che la  $U$  deve potersi esprimere mediante la somma di due funzioni.

La prima conterrà in modo arbitrario tutte le variabili, ad eccezione della  $p_i$ , la quale vi entra soltanto nei fattori

$$\frac{I}{II_1 - II_2}, \quad \frac{I}{II_2 - II_3}, \quad \dots \quad \frac{I}{II_r - II_1}, \quad \dots \quad \frac{I}{II_r - II_1}.$$

La seconda conterrà in modo arbitrario la  $p_r$ , e sarà tale funzione di  $p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_{r+1}, \dots, p_n$  che, moltiplicata per  $(\Pi_r - \Pi_1)$

non conterrà la  $p_1$ , moltiplicata per  $(\Pi_r - \Pi_1)$  non conterrà la  $p_2$ , ..., moltiplicata per  $(\Pi_r - \Pi_n)$  non conterrà la  $p_n$ .

Questa seconda funzione sarà quindi della forma

$$\frac{f_r(p_r)}{(\Pi_r - \Pi_1)(\Pi_r - \Pi_2) \dots (\Pi_r - \Pi_n)}$$

con  $f_r(p_r)$  funzione arbitraria della sola  $p_r$ .

Potremo quindi scrivere :

$$U = F(p_1, p_2, \dots p_{r-1}, p_r, p_{r+1}, \dots p_n) + \frac{f_r(p_r)}{(\Pi_r - \Pi_1)(\Pi_r - \Pi_2) \dots (\Pi_r - \Pi_n)},$$

dove  $F$ , è una funzione arbitraria delle  $p_1, p_2, \dots p_{r-1}, p_{r+1}, \dots p_n$ , e contiene la  $p_r$  soltanto nei fattori

$$\frac{1}{\Pi_r - \Pi_1}, \quad \frac{1}{\Pi_r - \Pi_2}, \quad \dots \quad \frac{1}{\Pi_r - \Pi_n}.$$

Ma il ragionamento fatto vale per tutti i valori che può assumere  $r$ , cioè

$$1, 2, \dots n.$$

Ne consegue che la  $p_1$  può entrare arbitrariamente soltanto nel termine

$$\frac{f_1(p_1)}{(\Pi_1 - \Pi_2)(\Pi_1 - \Pi_3) \dots (\Pi_1 - \Pi_n)},$$

che la  $p_2$  può entrare arbitrariamente soltanto nel termine

$$\frac{f_2(p_2)}{(\Pi_2 - \Pi_1)(\Pi_2 - \Pi_3) \dots (\Pi_2 - \Pi_n)}$$

.....

e che quindi la  $U$  dovrà necessariamente avere la forma

$$U = \sum_{r=1}^n \frac{f_r(p_r)}{(\Pi_r - \Pi_1)(\Pi_r - \Pi_2) \dots (\Pi_r - \Pi_n)},$$

SULLE TRASFORMAZIONI DELLE EQUAZIONI DELLA DINAMICA. 185

I problemi *trasformati* ammetteranno anche essi un ugual numero di integrali quadratici nelle  $\frac{dq_r}{dt_i} = \frac{dp_r}{dt_i}$ .

I risultati sopra esposti contengono in sè, come farò vedere, tutti quelli ottenuti dal sig. Appell, dal sig. Dauthéville, dal Dr. Picciati, relativi ai problemi aventi due gradi di libertà.

Di questi risultati io mi avvarò per svolgere alcune conseguenze ed applicazioni.

Roma, 26 febbrajo 1895.

GIOVANNI DI PIRRO.

## SULLE SECANTI MULTIPLE DI UNA CURVA ALGEBRICA

DELLO SPAZIO A TRE OD A QUATTRO DIMENSIONI.

Nota di L. Berzolari, in Torino.

(Estratto di Lettera diretta al prof. C. F. Geiser).

Adunanza del 10 febbrajo 1893.

Nel lavoro *Ueber die dreifachen Secanten einer algebraischen Raumcurve* (*Collectanea Mathem. in mem. D. Chelini*, 1881) Ella ha determinato, in due modi, il grado della rigata costituita dalle trisecanti della curva comune a due superficie algebriche di dati ordini (e ne ha poi dedotto l'analogo risultato per una qualsivoglia curva algebrica dello spazio ordinario), ricorrendo all'osservazione del § I (pag. 296), secondo la quale, in senso algebrico, le trisecanti della curva comune ad un piano e ad una superficie d'ordine  $n$  possono riguardarsi come costituenti una rigata d'ordine

$$-\frac{1}{6} n(n-1)(n-2).$$

Ora non è forse del tutto sprovvisto d'interesse mostrare come, senza punto nuocere alla semplicità del Suo metodo, si possa evitare questa considerazione alquanto paradossale, o, almeno, non geo-

metrica, di un ordine negativo di una superficie. A ciò sono pervenuto facendo uso dello stesso principio che informa tutto il Suo lavoro, cioè di quello che il sig. Schubert ha chiamato il principio della conservazione del numero.

### § I.

Rappresentero con  $F^m$  una superficie d'ordine  $m$ , con  $(F^m F')$  la curva che è completa intersezione delle superficie  $F^m$  ed  $F'$ , e con  $\varphi(m, n)$  l'ordine della rigata costituita dalle trisecanti di una  $(F^m F')$ .

Ciò posto, cerco il numero  $\varphi(2a, n)$ : decomponendo  $F^{2a}$  in  $a$  superficie di 2° ordine, cioè ponendo  $F^{2a} = F_1^2 F_2^2 \dots F_a^2$ , la rigata, di cui si cerca il grado, è formata: 1) dalle  $a$  rigate delle trisecanti delle curve  $(F_i^2 F')$ , ciascuna delle quali (*Collectanea*, pag. 294) è di ordine  $\frac{2}{3} n(n-1)(n-2)$ ; 2) dalle  $2 \cdot \frac{a(a-1)}{2}$  rigate generate dalle corde di una delle curve  $(F_i^2 F')$  appoggiate in un punto ad una delle curve rimanenti: ciascuna (*Collectanea*, pag. 302) è di ordine  $2n[n(2n-1) + n(n-1)] - 4n(2n-1)$ , cioè  $2n(3n^2 - 6n + 2)$ ; 3) dalle  $\frac{a(a-1)(a-2)}{6}$  rigate delle rette che si appoggiano in punti distinti a tre delle  $(F_i^2 F')$ , e che sono di ordine

$$2 \cdot (2n)^3 - 3 \cdot 4n \cdot 2n = 8n^3(2n-3).$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} \varphi(2a, n) &= a \cdot \frac{2}{3} n(n-1)(n-2) + a(a-1) \cdot 2n(3n^2 - 6n + 2) \\ &\quad + \frac{4}{3} a(a-1)(a-2) \cdot n^2(2n-3) \\ &= \frac{2}{3} an(an-1)[4an - 3(2a+n) + 4]. \end{aligned}$$

Dando qui ad  $a$  tre valori distinti, per es. 1, 2 e 3, col metodo

da Lei indicato a pag. 300 dei *Collectanea* si deduce il valore generale di  $\varphi(m, n)$ , cioè (\*):

$$(1) \quad \varphi(m, n) = \frac{1}{6} mn(mn - 2)[2mn - 3(m + n) + 4].$$

Del resto si può ottenere questa medesima formula anche con un procedimento diretto, e simile a quello di cui Ella ha fatto uso a pag. 300 dei *Collectanea*, ma senza però ricorrere all'osservazione del § I del Suo lavoro. Infatti, se  $m = 2a$ , posto  $F'' \equiv F_1^2 F_2^2 \dots F_a^2$ , si trova per  $\varphi(2a, n)$  l'espressione già scritta sopra, la quale colla sostituzione di  $m = 2a$ , si riduce a quella fornita dalla (1). Se invece  $m = 2a + 1$ , si ponga  $F'' \equiv F_1^2 F_2^2 \dots F_{a-1}^2 F_a^3$ ; allora la rigata delle trisecanti di  $(F'' F'')$  si decompone: 1) nelle  $a - 1$  rigate delle trisecanti delle curve  $(F_i^2 F'')$ , di cui ciascuna è di grado  $\frac{2}{3} n(n-1)(n-2)$ , e nella rigata delle trisecanti della  $(F^3 F'')$ , la quale (*Collectanea*, pag. 297) è di grado  $\frac{1}{2} n(3n-2)(3n-5)$ ; 2) nelle  $2 \cdot \frac{(a-1)(a-2)}{2}$  rigate costituite dalle rette che tagliano in due punti una delle  $(F_i^2 F'')$  ed in un punto una delle rimanenti: ciascuna è di grado  $2n(3n^2 - 6n + 2)$ ; 3) nelle  $a - 1$  rigate formate dalle rette che tagliano in due punti una  $(F_i^2 F'')$  ed in un punto la  $(F^3 F'')$ , e di cui ciascuna ha il grado  $3n(3n^2 - 6n + 2)$ ; 4) nelle  $a - 1$  rigate aventi per generatrici le corde di  $(F^3 F'')$  appoggiate ad una  $(F_i^2 F'')$ , e che sono di grado  $3n(5n^2 - 9n + 2)$ ; 5) nelle  $\frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{6}$  rigate costituite dalle rette appoggiate in punti distinti a tre delle curve  $(F_i^2 F'')$ , e che sono del grado  $8n^2(2n-3)$ ; 6) infine nelle  $\frac{(a-1)(a-2)}{2}$  rigate, che sono luogo delle rette appoggiate in punti distinti a due delle  $(F_i^2 F'')$  ed alla  $(F^3 F'')$ , e che hanno il grado  $12n^2(2n-3)$ .

---

(\*) Allo stesso risultato si potrebbe anche pervenire, facendo uso dei valori di  $\varphi(m, n)$  già da Lei determinati per  $m = 2$  ed  $m = 3$ , ed aggiungendo il valore che si ottiene dalla formula superiore ponendo, ad es.,  $a = 2$  (cioè  $m = 4$ ), e poi applicando il Suo metodo sopra ricordato.

Sommmando le varie espressioni così ottenute, si trova per  $\varphi(2\alpha + 1, n)$  un valore che, colla sostituzione di  $m$  a  $2\alpha + 1$ , si riduce ancora a quello dato dalla (1).

### §III.

Lo stesso metodo permette di aggiungere ai risultati del Suo lavoro la determinazione del numero  $\psi(m, n)$  delle quadrisecanti di una ( $F''F''$ ), e poscia di una curva algebrica qualunque del nostro spazio (nell'ipotesi, ben s'intende, che tal numero sia finito). A tale scopo, per non dilungarmi soverchiamente, farò capo alle seguenti note formole, avvertendo però che, nei casi particolari in cui dovrò applicarle, esse si possono tutte dedurre assai semplicemente dal Suo lavoro.

a) Le trisecanti di una curva di ordine  $m$  con  $b$  punti doppi apparenti, appoggiate ad una curva di ordine  $m_1$ , avente colla prima  $k$  punti comuni, sono in numero di

$$m_1(m-2) \left[ b - \frac{1}{6} m(m-1) \right] - k(b-m+2).$$

b) Le corde comuni a due curve di ordini  $m_1$  ed  $m_2$ , aventi rispettivamente  $b_1$  ed  $b_2$  punti doppi apparenti, ed aventi in comune  $k$  punti, sono in numero di

$$b_1b_2 + \frac{1}{4} m_1 m_2 (m_1-1)(m_2-1) - k(m_1-1)(m_2-1) + \frac{1}{2} k(k-1).$$

c) Le corde di una curva d'ordine  $m$  con  $b$  punti doppi apparenti, appoggiate a due altre curve di ordini  $m_1$  ed  $m_2$ , le quali abbiano rispettivamente in comune colla prima curva  $k_1$  e  $k_2$  punti, e fra loro  $k_{12}$  punti, sono in numero di

$$m_1 m_2 \left[ b + \frac{1}{2} m(m-1) \right] - (m-1)(k_1 m_2 + k_2 m_1) - b k_{12} + k_1 k_2.$$

d) Le rette appoggiate a quattro curve di ordini  $m_1, m_2, m_3, m_4$ , tali che quelle degli ordini  $m_i$  ed  $m_j$  abbiano  $k_{ij}$  punti comuni, sono

in numero di

$$2m_1m_2m_3m_4 - \sum_i^4 m_p m_q k_{ri} + k_{12}k_{34} + k_{13}k_{24} + k_{14}k_{23} \text{ (*)}.$$

Noto ancora che dall'esistenza di 27 rette sopra una  $F^3$  risulta:

$$\text{e)} \quad \psi(3, n) = \frac{9}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Ciò posto, comincio collo stabilire l'espressione di  $\psi(3\alpha, n)$ , per il che basta porre  $F^{3\alpha} \equiv F_1^3 F_2^3 \dots F_\alpha^3$ . Allora le quadriseccanti della curva  $(F^{3\alpha} F^n)$  si scindono in vari gruppi, come segue: 1)  $\alpha$  gruppi, di cui ciascuno è formato dalle quadriseccanti di una delle curve  $(F_i^3 F^n)$ , che, per e), sono in numero di  $\frac{9}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ ;

2)  $2 \cdot \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$  gruppi, di cui ciascuno è formato dalle rette che tagliano in tre punti una delle  $(F_i^3 F^n)$  ed in un punto una delle rimanenti: ciascuno di tali gruppi, per  $\alpha$ ), consta di  $\frac{3}{2}n(9n^3 - 39n^2 + 46n - 12)$  rette; 3)  $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$  gruppi, ognuno dei quali è costituito dalle corde comuni a due delle  $(F_i^3 F^n)$ : per  $\beta$ ), ciascuno di tali gruppi contiene  $\frac{9}{4}n(13n^3 - 50n^2 + 47n - 6)$  rette; 4)  $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}$  gruppi, ciascuno dei quali è formato dalle corde di una delle  $(F_i^3 F^n)$  che si appoggiano a due delle rimanenti: per  $\gamma$ ), in ognuno di questi gruppi sono contenute  $\frac{27}{2}n^2(5n^2 - 17n + 12)$  di tali rette; 5)

(\*) S'intende da sè che (qui, come in tutto il presente scritto) i punti comuni alle rette considerate e alle curve date si suppongono tutti distinti fra loro.

Le formole superiori  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ),  $\delta$ ) si trovano dimostrate, per es., in un lavoro del sig. Picquet (*Bulletin de la Société Mathém. de France*, t. I, 1873, pp. 260-280); le ultime due sono però date inesattamente da questo Autore, come ha rilevato il sig. Guccia a pag. 27 del t. I di questi *Rendiconti* (seduta del 22 marzo, 1885).

$\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{24}$  gruppi, ognuno dei quali consta delle rette che si appoggiano a quattro delle curve ( $F_i^3 F^*$ ): per  $\delta$ , ciascuno di tali gruppi contiene  $81 n^2(2n^2 - 6n + 3)$  rette.

Sommmando le varie espressioni ottenute, si trova :

$$\begin{aligned} \psi(3a, n) = & \frac{3}{8} an \{ (3a-1)(n-1)[3an(3a-1)(n-1)-24an+22] \\ & -(3an-2)(an-1)(3an-13) \}. \end{aligned}$$

Se allora si osserva che l'espressione generale di  $\psi(m, n)$  dev'essere simmetrica e di 4° grado in  $m$  ed  $n$ , e deve annullarsi per  $m=0$  e per  $n=0$ , sostituendo ad  $a$  quattro valori diversi, per es. 1, 2, 3 e 4, si trova col metodo dei coefficienti indeterminati la formola richiesta :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(m, n) = \frac{1}{24} mn [2m^3n^3 - 6m^2n^2(m+n) + 3mn(m+n)^2 \\ + 18mn(m+n) - 26mn - 66(m+n) + 144]. \end{array} \right.$$

Chiamando  $b$  il numero dei punti doppi apparenti di  $(F^*F^*)$ , si ha :

$$b = \frac{1}{2} mn(m-1)(n-1),$$

onde, ponendo  $mn = p$ , il secondo membro della (2) si può scrivere anche nella forma seguente :

$$(3) \quad \frac{1}{2} b(b-4p+11) - \frac{1}{24} p(p-2)(p-3)(p-13).$$

Dunque una curva di ordine  $p$  dotata di  $b$  punti doppi apparenti, la quale sia completa intersezione di due superficie, possiede un numero di quadrisecanti dato dall'espressione (3).

Se poi si suppone che la curva si spezzi in due parti aventi in

comune un certo numero di punti, con un metodo analogo a quello del Suo § IV, e facendo uso delle  $\alpha$ ) e  $\beta$ ), si trova che il risultato precedente è vero anche per una curva che sia soltanto parziale intersezione di due superficie.

### § III.

Il metodo precedente si può anche applicare alla determinazione del numero delle trisecanti di una curva algebrica dello spazio a quattro dimensioni, studiando dapprima la curva che è completa intersezione di tre *varietà* (a tre dimensioni), di cui l'una sia del 2° ordine, e ricorrendo alla rappresentazione di quest'ultima nello spazio ordinario.

A tal fine è necessario premettere le seguenti proposizioni, che si dimostrano facilmente, estendendo noti procedimenti dello spazio ordinario :

$\alpha'$ ) Date due curve di ordini  $m$  ed  $m_1$ , aventi  $k$  punti comuni, e di cui la prima abbia  $b$  delle sue corde appoggiate ad una data retta arbitraria (\*), esistono

$$b m_1 - (m - 2)k$$

corde della prima, che si appoggiano in un punto alla seconda.

$\beta'$ ) Date tre curve di ordini  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , tali che quelle degli ordini  $m_1$  ed  $m_2$  abbiano  $k$ , punti comuni, esistono

$$m_1 m_2 m_3 - (m_1 k_{23} + m_2 k_{31} + m_3 k_{12})$$

rette ad esse appoggiate in punti distinti.

Ciò posto, rappresenterò con  $(V^m V^n)$  la superficie d'ordine  $mn$  che è completa intersezione delle varietà  $V^m$  e  $V^n$  degli ordini  $m$

(\*) Il numero  $b$  è legato all'ordine  $m$  ed al genere  $p$  della curva mediante la relazione :

$$b = \frac{1}{2} (m - 1)(m - 2) - p.$$

ed  $n$ ; con  $(V^m V^n V^p)$  la curva d'ordine  $mnp$  completa intersezione delle varietà  $V^m$ ,  $V^n$ ,  $V^p$ ; e con  $\varphi(m, n, p)$  il numero delle trisecanti di una tale curva. Per determinare questo numero, cominciamo a trovare l'espressione di  $\varphi(m, n, 2)$ , cioè il numero delle trisecanti di una  $(V^m V^n V^2)$ . È chiaro che tali rette giacciono sopra  $V^2$ , onde la questione si riduce a cercare quante fra le rette di  $V^2$  secano in tre punti la superficie  $(V^m V^n)$ . Per questo basta ricorrere alla proiezione stereografica di  $V^2$ , cioè basta progettare  $V^2$  da un suo punto sopra un iperpiano  $S$ : otteniamo in questo (\*) una conica fondamentale  $C^2$ , e l'immagine della curva  $(V^m V^n V^2)$  è una curva  $C^{2mn}$  di ordine  $2mn$  appoggiata a  $C^2$  in  $2mn$  punti, mentre le rette di  $V^2$  non passanti per il centro di proiezione hanno per immagini le rette di  $S$  appoggiate a  $C^2$  in un solo punto. Il numero cercato è quindi quello delle rette di  $S$  che tagliano in tre punti la  $C^{2mn}$  ed in un punto (diverso dai precedenti) la  $C^2$ , cioè, pel teorema α) del § II,

$$4(mn - 1) \left[ h - \frac{mn(2mn - 1)}{3} \right] - 2mn(h - 2mn + 2),$$

avendo indicato con  $h$  il numero dei punti doppi apparenti di  $C^{2mn}$ .

Ora è noto (\*\*) che

$$(4) \quad h = mn(2mn - m - n),$$

dunque risulta :

$$\gamma') \quad \varphi(m, n, 2) = \frac{2}{3} mn[2m^2n^2 - 3mn(m + n) + 6(m + n) - 8].$$

Siamo ormai in grado di trovare l'espressione di  $\varphi(m, n, 2a)$ , poichè basta porre  $V^{2a} \equiv V_1^2 V_2^2 \dots V_a^2$ . Allora le trisecanti di  $(V^m V^n V^{2a})$  si scindono in vari gruppi come segue: 1)  $a$  gruppi, di

(\*) Veronese, *Behandlung der projectivischen Verhältnissen, etc.* (Math. Annalen, Bd. XIX, 1882), Abschnitt III, § 4; Segre, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Mem. della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, t. XXXVI, 1884), § 4.

(\*\*) Veronese, l. c., pag. 204.

cui ciascuno è formato dalle trisecanti di una delle  $(V^m V^n V_i^2)$ , e possiede un numero di rette che è dato dalla  $\gamma'$ ; 2)  $2 \cdot \frac{a(a-1)}{2}$  gruppi, di cui ciascuno è costituito dalle corde di una delle  $(V^m V^n V_i^2)$  che si appoggiano ad una delle rimanenti: in virtù di  $\alpha'$ , in cui si ponga per  $k$  il valore  $4mn$ , e per  $b$  il valore dato dalla (4), ognuno dei gruppi considerati contiene

$$2mn[2m^2n^2 - mn(m+n) - 4mn + 4]$$

rette; 3)  $\frac{a(a-1)(a-2)}{6}$  gruppi, di cui ciascuno è formato dalle rette che secano tre delle  $(V^m V^n V_i^2)$  in un punto ciascuna: per  $\beta'$ , ognuno di tali gruppi contiene  $8m^2n^2(mn-3)$  rette.

Sommando le espressioni precedenti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi(m, n, 2a) = & \frac{2}{3}mn a [2m^2n^2a^2 - 3mn a(m+n) - 6mn a^2 \\ & + 6mn a + 6(m+n) + 12a - 20]. \end{aligned}$$

Se infine osserviamo che l'espressione generale cercata di  $\varphi(m, n, p)$  dev'essere simmetrica e di 3° grado in  $m, n, p$ , e che inoltre essa deve annullarsi per  $m=0$ , per  $n=0$ , e per  $p=0$ , attribuendo ad  $a$  nell'ultima relazione tre valori differenti, per es. 1, 2 e 3, si trova facilmente:

$$(5) \quad \varphi(m, n, p) = \frac{1}{6}mnp(mnp - 4)[mnp - 3(m+n+p) + 10].$$

Chiamando  $b$  il numero delle corde di  $(V^m V^n V^p)$  appoggiate ad una retta arbitraria, la formula già sopra applicata del sig. Veronese (l. c., pag. 204) dà:

$$b = \frac{1}{2}mnp(mnp - m - n - p + 2),$$

onde, posto  $mnp = r$  il secondo membro della (5) si può anche

scrivere come segue :

$$(6) \quad (r - 4) \left[ h - \frac{1}{3} r(r - 2) \right].$$

Dunque nello spazio a quattro dimensioni una curva di ordine  $r$ , che sia intersezione completa di tre varietà (a tre dimensioni), e tale che  $h$  delle sue corde siano appoggiate ad una retta data arbitrariamente, possiede un numero di trisecanti dato dall'espressione (6).

Supponendo poi che la curva si spezzi in due parti, con metodo analogo a quello del Suo § IV si troverebbe che il risultato precedente è vero per qualunque curva algebrica dello spazio a quattro dimensioni. Farò invece vedere come si possa pervenire alla stessa conclusione anche estendendo il metodo, col quale il sig. Picquet nel lavoro già ricordato (\*) ha stabilito il numero delle quadrisecanti di una curva algebrica dello spazio ordinario.

Data una curva dell'ordine  $m$ , la quale abbia  $h_m$  delle sue corde appoggiate ad una retta arbitraria, sia  $\varphi(m)$  il numero delle sue trisecanti.

Per determinare questo numero, supponiamo che la curva si decomponga in altre due degli ordini  $m_1$  ed  $m_2$ , di modo che sarà  $m_1 + m_2 = m$ ; inoltre indichiamo per queste due curve con  $h_{m_1}$  ed  $h_{m_2}$  i numeri analoghi al precedente numero  $h_m$ . Le due curve avranno in comune un certo numero  $k$  di punti, che si esprime facilmente per mezzo dei numeri già introdotti; invero, per  $\beta'$ , esistono  $m_1 m_2 - k$  rette che tagliano in punti distinti le due curve ed una retta arbitraria, onde :

$$h_m = h_{m_1} + h_{m_2} + (m_1 m_2 - k),$$

da cui :

$$k = h_{m_1} + h_{m_2} - h_m + m_1 m_2.$$

(\*) V. anche la Nota inserita dal medesimo Autore nel t. 77 (pp. 474-478) dei *Comptes Rendus* (1873).

Allora, per  $\alpha'$ , si ha :

$$\begin{aligned}\varphi(m) &= \varphi(m_1) + \varphi(m_2) + m_1 b_{m_2} + m_2 b_{m_1} \\ &\quad - (m-4)(b_{m_1} + b_{m_2} - b_m + m_1 m_2).\end{aligned}$$

Se in particolare facciamo la scomposizione  $m_1 = m-2$ ,  $m_2 = 2$ , per il che sarà  $\varphi(m_1) = 0$ ,  $b_{m_1} = 0$ , dall'ultima relazione si ricava la formula ricorrente :

$$(7) \quad \varphi(m) = \varphi(m-2) + (m-4)b_m - (m-6)b_{m-4} - 2(m-2)(m-4).$$

Per dedurre da questa il valore di  $\varphi(m)$  occorre distinguere il caso in cui  $m$  è pari da quello in cui esso è dispari.

Se  $m = 2n$ , scrivendo la (7) per i valori  $2n$ ,  $2n-2$ , ...,  $8$ ,  $6$  di  $m$  e sommando, si ottiene :

$$\begin{aligned}\varphi(2n) &= (2n-4)b_{2n} - 8 \sum_{i=1}^{2n-2} i(i+1) \\ &= (2n-4)b_{2n} - \frac{8}{3}n(n-1)(n-2),\end{aligned}$$

e l'ultimo membro, sostituendo  $m$  a  $2n$ , si riduce all'espressione (6).

Se  $m = 2n+1$ , scrivendo la (7) per i valori  $2n+1$ ,  $2n-1$ , ...,  $7$ ,  $5$  di  $m$  e sommando, si ha :

$$\begin{aligned}\varphi(2n+1) &= (2n-3)b_{2n+1} - 2 \sum_{i=1}^{2n-1} (4i^2 - 1) + 1 \\ &= (2n-3) \left[ b_{2n+1} - \frac{1}{3}(4n^2 - 1) \right],\end{aligned}$$

ed anche questa espressione, sostituendo  $m$  a  $2n+1$ , si riduce alla (6).

#### § IV.

Come complemento delle indicazioni storiche date da Lei nell'ultima parte del Suo lavoro, si può osservare che i due problemi dello spazio ordinario trattati sopra (nei primi due paragrafi) erano

stati già risolti anche dal sig. Picquet (1873) nei due lavori citati, e dal sig. Schubert nel § 43 del *Kalkül der abzählenden Geometrie* (1879). Posteriormente (1881) il sig. Rupp ha pubblicato nel Bd. XVIII dei *Math. Annalen* un lavoro che si connette col medesimo argomento.

Infine l'espressione (6), che dà il numero delle trisecanti di una curva algebrica dello spazio a quattro dimensioni, è compresa in una formula più generale dovuta al sig. Castelnuovo (*Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche*, n. 1; questi *Rendiconti*, t. III, 1889), il quale l'ha dedotta da considerazioni differenti, pure invocando in aiuto il principio della conservazione del numero.

Torino, 20 gennajo 1895.

L. BERZOLARI.

---

UN PICCOLO CONTRIBUTO ALLA TEORIA  
DEGLI AGGREGATI.

Nota del Dr. C. Garibaldi, in Genova.

Adunanza del 10 marzo 1895.

Nella parte VI del *Formulario di Matematica* (\*) è riportato  
(§ 1 P 9) il teorema di Cantor (\*\*):

$$N \subset N_{alg} = N \subset N,$$

essendo per definizione

$$N_{alg} = q' \cap \overline{x} \epsilon (p \in N. a_0, a_1, \dots, a_p \in n. a_0 = o. a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p = o. = \underline{\underline{p, a_0, a_1, \dots, a_p}} \Lambda).$$

È oggetto di questa nota la generalizzazione del teorema di Cantor.

Per facilitare la dimostrazione, premetterò due principi gene-

(\*) G. Vivanti. *Sulla parte VI del Formulario*. Rivista di Matematica.  
Anno 1894.

(\*\*) G. Cantor. *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen*. Crelle 77, trad. fr. in Acta Math. II.

rali sulla teoria delle potenze degli aggregati; principi che parmi possano essere utili in molti casi: sia per facilitare ulteriori ricerche in questo ramo importante e difficile della teoria, come per coordinare fra loro teoremi già dimostrati laboriosamente con altri metodi.

## I.

$$m, n \in \mathbb{N}. u_1, u_2, \dots, u_m \in K q_n. \text{num } u_i = \infty. \circ:$$

**TEOREMA I.**—Se l'aggregato  $A$  è formato coi punti degli aggregati  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , di eguale potenza,  $A$  ha la stessa potenza di  $u_1, u_2, \dots, u_m$ .

Consideriamo in primo luogo il caso in cui  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , non hanno punti comuni; e fissiamo la nostra attenzione sopra uno qualunque degli aggregati dati, ad esempio  $u_i$ .

Pensiamo una funzione  $f_i$  delle coordinate dei punti di  $u_i$  univalente nei punti di  $u_i$  e zero nei punti che non appartengono ad  $u_i$ .

Consideriamo la funzione  $f = \sum f_i$ , che risulta così definita in tutti i punti di  $A$ .

È facile vedere che  $u_i$  ed  $A$  hanno la stessa potenza.

Infatti ad ogni punto di  $u_i$  corrisponde un valore di  $f_i$ , un valore di  $\sum f_i$ , e pertanto un determinato punto di  $A$ .

Reciprocamente ad un punto di  $A$  corrisponde un valore di  $\sum f_i$ , e però un certo valore  $f_k$ , e quindi un punto di  $u_k$ . Ma  $u_k$  ha la stessa potenza di  $u_i$ , onde ad ogni punto di  $A$  corrisponde un punto di  $u_i$ .

Supponiamo ora che  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , abbiano dei punti comuni.

Sia  $u_{i,k}$  l'aggregato dei punti comuni a due qualunque degli aggregati dati  $u_i$  ed  $u_k$ . L'aggregato  $u_{i,k}$  avrà o la potenza di  $u_i$  o potenza inferiore.

Possiamo ora pensare un'altro aggregato  $B_{i,k}$  composto di punti che non appartengono ad  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , il quale abbia la stessa potenza dell'aggregato  $u_{i,k}$ .

È chiaro che  $A$  avrà la stessa potenza dell'aggregato risultante dai punti non comuni di  $u_1, u_2, \dots, u_m$  contati tali punti ciascuno una sola volta, e dai punti degli aggregati come  $B_{i,k}$ .

Se gli aggregati  $B_{i,k}$  hanno la stessa potenza di  $u_i$ , la questione è ridotta al caso precedente, ed  $A$  avrà la stessa potenza di  $u_i$ .

Se gli aggregati  $B_{i,t}$  hanno potenza inferiore ad  $u_i$ , allora si vede che la potenza di  $A$  non potrà essere per questo fatto maggiore di quella di  $u_i$ . Ma non potrà manifestamente essere inferiore a quella di  $u_i$ , onde si conclude che sarà eguale.

Il teorema resta così dimostrato.

Esso risulta come caso particolare del seguente :

**TEOREMA II.** — *Se l'aggregato  $A$  è costituito dai punti degli aggregati  $u_1, u_2, \dots, u_m$  di potenza differente,  $A$  ha potenza eguale a quella di  $u_i$  che ha potenza più elevata fra  $u_1, u_2, \dots, u_m$ .*

Infatti la potenza di  $A$  non sarà inferiore a quella di  $u_i$ ; non sarà superiore, perchè sarebbe appena eguale se ad  $u_1, u_2, \dots, u_m$  si unissero altri aggregati  $B_1, B_2, \dots$ , in modo che  $u_i + B_1, u_i + B_2, \dots$ , avessero la stessa potenza di  $u_i$ .

Si conclude pertanto che la potenza di  $A$  è eguale a quella di  $u_i$ . Il teorema I si esprime in simboli come segue :

$$\begin{aligned} m, n \in N. u_1, u_2, \dots, u_m \in Kq_n. \text{num } u_1 = \infty. Nc^{\epsilon} u_1 &= Nc^{\epsilon} u_2 = \\ \dots = Nc^{\epsilon} u_m. \circ. Nc^{\epsilon}(u_1 \cup u_2 \cup \dots \cup u_m) &= Nc^{\epsilon} u_1. \end{aligned}$$

In particolare :

$$u, v \in Kq. \text{num } u \in N. \text{num } v = \infty. \circ. Nc^{\epsilon}(u \cup v) = Nc^{\epsilon} v.$$

$$u, v \in Kq. \text{num } u = \infty. Nc^{\epsilon} u = Nc^{\epsilon} v. \circ. Nc^{\epsilon}(u \cup v) = Nc^{\epsilon} u.$$

$$Nc^{\epsilon} N + Nc^{\epsilon} N = Nc^{\epsilon} N.$$

$$Nc^{\epsilon} N + Nc^{\epsilon} \emptyset = Nc^{\epsilon} \emptyset.$$

## II.

Possiamo ora applicare i due teoremi dimostrati alla generalizzazione del teorema di Cantor, al quale abbiamo accennato in principio.

Si ha in proposito il seguente teorema :

*Se i coefficienti di un'equazione algebrica di grado  $n$  assumono i valori di un'aggregato numerabile ciascuno, l'aggregato di tutti i numeri che possono essere radici di una tale equazione è pure numerabile.*

Sia :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

l'equazione che si considera.

Diamo ad  $a_0$  tutti i valori di cui è suscettibile, i quali per ipotesi costituiscono un'aggregato numerabile, e manteniamo costanti gli altri coefficienti. L'aggregato di equazioni che così otteniamo è numerabile perchè ad ogni valore di  $a_0$  corrisponde un'equazione determinata.

Ogni equazione ci dà un gruppo di  $n$  radici; prendendo ordinatamente da ogni gruppo di  $n$  radici la prima, la seconda, ..., otteniamo  $n$  aggregati numerabili costituiti da tutti i numeri che sono radici dell'equazione data corrispondentemente ai valori considerati di  $a_0$ .

Ragionando analogamente cogli altri coefficienti si conclude che l'aggregato dei numeri che possono essere radici dell'equazione proposta, si compone di  $(n+1)n$  aggregati numerabili. In forza del primo teorema possiamo dunque concludere che tale aggregato è pure numerabile.

Questo teorema si può esprimere in simboli come segue. Sia  $u$  l'aggregato dei valori che può assumere uno qualunque dei coefficienti.

Si può supporre che esso sia lo stesso per tutti i coefficienti. Pertanto si ha :

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N}, u \in K, u \in N. \circ. q' \cap \bar{x}(a_0, a_1, \dots, a_n \in u, a_0 - = 0, a_0 x^n + \\ + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, =_{a_0, a_1, \dots, a_n} \Lambda), \in N. \end{aligned}$$

Seguendo lo stesso processo di dimostrazione e facendo uso del teorema II, il risultato precedente si generalizza come segue :

*L'aggregato dei numeri che sono radici di un'equazione di grado  $n$ , è della stessa potenza di quello degli aggregati percorsi dai coefficienti che ha potenza più elevata.*

Genova, 22 febbrajo 1895.

C. GARIBALDI.

## SULLA IRRAZIONALITÀ ICOSAEDRICA.

Nota di G. Vivanti, in Pavia.

Adunanza del 28 aprile 1895.

1. Klein, nelle sue *Vorlesungen über das Ikosaeder* (\*), scrive:
- Wir werden jetzt als weitere, durchführbare Operation die Auflösung der Ikosaedergleichung adjungiren und fragen, ob unter den Aufgaben, die sich durch Wurzelziehen allein nicht erledigen lassen, nicht solche sein mögen, bei denen dies mit Hülfe der Ikosaederirrationalität gelingt ».

Il primo di tali problemi è la risoluzione dell'equazione generale del  $5^{\circ}$  grado. Può chiedersi ora, se col solo aiuto dell'irrazionalità icosaedrica possano risolversi equazioni generali di grado superiore al  $5^{\circ}$ . Noi vogliamo dimostrare che a tale domanda deve rispondersi negativamente.

2. Poniamo anzitutto in chiaro in che consista il problema che vogliamo trattare.

Consideriamo come *nota* una quantità, quando essa sia radice d'un'equazione appartenente ad una certa classe *C* d'equazioni arbitrariamente assunta e i cui coefficienti appartengano ad un campo di razionalità dato; e come *eseguibile* l'operazione consistente nella

---

(\*) I 4 § 16.

**Determinazione di tale quantità.** Data un'equazione  $E$ , i cui coefficienti appartengano ad un certo campo di razionalità  $M$ , risolvere quest'equazione mediante operazioni eseguibili significa costruire una serie finita di equazioni (*risolventi*)  $R_1, R_2, \dots, R_m$  appartenenti alla classe  $C$ , e tali che i coefficienti di  $R_i$  sieno quantità del campo  $M$ , che quelli di ciascuna delle altre sieno funzioni razionali d'una radice della precedente e delle quantità del campo  $M$ , e che le radici della  $E$  sieno funzioni razionali d'una radice dell'ultima risolvente  $R_m$  e delle quantità di  $M$ . Se p. es. si riguarda come unica operazione eseguibile l'estrazione di radice e quindi la classe  $C$  comprende le sole equazioni binomie, la costruzione delle risolventi  $R_1, \dots, R_m$  costituisce la *risoluzione algebrica* della  $E$ . È noto che, se questa equazione è generale e di grado superiore al quarto, il problema è insolubile; ed è altresì noto che, se si riguarda come operazione eseguibile anche la risoluzione dell'equazione dell'icosaedro;

$$(1) \quad F(z) = Z,$$

dove :

$$F(z) = \frac{H^3(z)}{f^3(z)} = \frac{[-z^{20} + 228z^{15} - 494z^{10} - 228z^5 - 1]^3}{[z^{11} + 11z^6 - z]^5},$$

può risolversi l'equazione generale del 5º grado. Noi ci proponiamo ora di vedere se, data un'equazione generale di grado  $n > 5$ , sia possibile costruire la serie delle risolventi  $R$  quando la classe  $C$  consti delle equazioni binomie e dell'equazione icosaedrica.

3. Si sa (\*) che le sole funzioni non simmetriche di cui una potenza sia una funzione simmetrica sono le funzioni alternanti; e che, se il numero delle variabili indipendenti è maggiore di 4, non y'ha alcuna funzione a più di 2 valori di cui una potenza sia una funzione a 2 valori.

Ne segue che, se la classe  $C$  comprende soltanto le equazioni

---

(\*) N. E. G. T. O., *Substitutionentheorie*, Leipzig 1882, §§ 47, 59.

binomie e l'equazione icosaedrica, o la  $R_1$ , sarà un'equazione binomia di grado 2 ed  $R_2$  un'equazione icosaedrica, oppure  $R_1$  sarà un'equazione icosaedrica. La risoluzione del problema propostoci dipende adunque anzitutto da quella del seguente: Supposta  $Z$  una funzione ad uno o a due valori di  $n$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n > 5$ ), vedere se sia possibile trovare una funzione  $\zeta$  razionale, a più di due valori, delle stesse variabili, che sia legata alla  $Z$  dalla relazione (1).

4. Sia  $H$  il gruppo (simmetrico od alternante) della funzione  $Z$ ,  $G$  quello della funzione  $\zeta_1, \zeta_1$  essendo una delle radici della (1). Tutte le altre radici di quest'equazione, essendo funzioni lineari di  $\zeta_1$ , sono funzioni razionali delle  $x$  il cui gruppo è ancora  $G$ . Le sostituzioni di  $H$  non appartenenti a  $G$ , dovendo lasciare invariata  $Z$ , muteranno  $\zeta_1$  in altre radici  $\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_r$  della (1); eppero il gruppo  $H$  sarà (meriedricamente) isomorfo al sottogruppo  $K$  d'ordine  $r$  del gruppo  $I$  dell'icosaedro formato dalle sostituzioni che trasformano  $\zeta_1$  in  $\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_r$ , e  $G$  sarà il sottogruppo di  $H$  corrispondente alla sostituzione identica di  $K$ . Eventualmente potrà essere  $r = 60$ , ossia  $K = I$ .

Il gruppo  $I$  si compone (\*):

Della sostituzione identica;

Di 15 sostituzioni d'ordine 2;

Di 20 sostituzioni d'ordine 3, che a due a due formano (colla sostituzione identica) un gruppo ciclico;

Di 24 sostituzioni d'ordine 5, che a 4 a 4 formano (colla sostituzione identica) un gruppo ciclico.

Esso contiene sottogruppi dei soli ordini 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12.

Se due gruppi  $P, Q$  sono meriedricamente isomorfi, essendo l'ordine di  $P$  maggiore di quello di  $Q$ , e se  $A, B$  sono due sostituzioni corrispondenti dei due gruppi, l'ordine di  $A$  è multiplo di quello di  $B$ . Ora, per  $n > 6$ , il gruppo  $H$ , sia esso simmetrico od alternante, contiene tutte le sostituzioni cicliche di 7 elementi  $S_7$ ; e poichè in  $I$  non v'ha alcuna sostituzione d'ordine 7, dovrà a tutte

---

(\*) Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Leipzig 1884, I 1 § 8.

le  $S_7$  corrispondere in  $K$  la sostituzione identica, e per conseguenza tutte le  $S_7$  saranno contenute in  $G$ . Ma ciò è impossibile, perché (\*)  $G$  non è né simmetrico né alternante; quindi non può sussistere l'isomorfismo tra  $H$  e  $K$ .

5. La dimostrazione è meno semplice per  $n = 6$ .

Sia dapprima  $H$  il gruppo simmetrico delle sostituzioni di 6 elementi; esso contiene 720 sostituzioni, e cioè: una di 1° ordine, 75 di 2°, 80 di 3°, 180 di 4°, 144 di 5°, 240 di 6°. Sia  $m$  l'ordine del gruppo  $G$ , ossia il rapporto di meriedria,  $\alpha, \beta, \gamma$  il numero delle sostituzioni degli ordini 2, 3, 5 contenute in  $K$ ;  $\beta$  sarà divisibile per 2,  $\gamma$  per 4. Alle  $\alpha$  sostituzioni d'ordine 2 di  $K$  corrisponderanno in  $H$   $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$  sostituzioni degli ordini 2, 4, 6; alle  $\beta$  d'ordine 3  $\beta_3, \beta_6$  degli ordini 3, 6; alle  $\gamma$  d'ordine 5  $\gamma_5$  d'ordine 5. Infine denoteremo con  $\omega_i$  ( $i = 2, 3, 4, 5, 6$ ) il numero delle sostituzioni d'ordine  $i$  contenute in  $G$ . Avranno luogo le seguenti relazioni:

- $$\begin{array}{ll} (2) & m r = 720, \\ (3) & 1 + \alpha + \beta + \gamma = r, \\ (4) & 1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 = m, \\ (5) & \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 = m \alpha, \\ (6) & \beta_3 + \beta_6 = m \beta, \\ (7) & \gamma_5 = m \gamma, \end{array} \quad \begin{array}{ll} (8) & \alpha_2 + \omega_2 = 75, \\ (9) & \beta_3 + \omega_3 = 80, \\ (10) & \alpha_4 + \omega_4 = 180, \\ (11) & \gamma_5 + \omega_5 = 144, \\ (12) & \alpha_6 + \beta_6 + \omega_6 = 240, \\ (13) & r \leq 60. \end{array}$$

Dalle (2), (13), e dal fatto che  $G$  non è simmetrico né alternante, segue:

$$(14) \quad 12 \leq m \leq 240,$$

quindi per le (7), (11):

$$12 \gamma \leq \gamma_5 \leq 144,$$

(\*) Netto, op. cit., § 35.

ossia  $\gamma \leq 12$ . Ciò dimostra che  $K$  non può coincidere con  $I$ , ma deve essere un suo sottogruppo proprio; ne segue:

$$r \leq 12, \quad m \geq 60, \quad \gamma \leq \frac{144}{60} < 3.$$

Quindi, dovendo  $\gamma$  essere multiplo di 4, sarà  $\gamma = 0$ , e per le (7), (11)  $\gamma_1 = 0$ ,  $\omega_1 = 144$ . Dopo ciò risulta dalla (4)  $m \geq 145$ , quindi per le (2), (14)  $m = 240$  o  $m = 180$ .

Per  $m = 240$  si ha  $r = 3$ ;  $K$  non può contenere sostituzioni di  $2^{\circ}$  ordine, cioè  $\alpha = 0$ , e per le (5), (10)  $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$ ,  $\omega_4 = 180$ , quindi per la (4):

$$m \geq 1 + \omega_4 + \omega_5 = 325,$$

relazione assurda.—Per  $m = 180$  si ha  $r = 4$ ;  $K$  non può contenere sostituzioni di  $3^{\circ}$  ordine, cioè  $\beta = 0$ , e per le (6), (9)  $\beta_3 = \beta_6 = 0$ ,  $\omega_3 = 80$ , quindi per la (4)  $m \geq 225$ , relazione assurda.

Sia ora  $H$  il gruppo alternante; esso contiene 360 sostituzioni, cioè: una di  $1^{\circ}$  ordine, 45 di  $2^{\circ}$ , 80 di  $3^{\circ}$ , 90 di  $4^{\circ}$ , 144 di  $5^{\circ}$ . Le relazioni (3), (7), (9), (11), (13) sussistono ancora; invece delle (2), (4), (5), (6), (8), (10), (12), (14) si hanno le seguenti:

$$(15) \quad mr = 360,$$

$$(19) \quad \alpha_2 + \omega_3 = 45,$$

$$(16) \quad 1 + \omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 = m,$$

$$(20) \quad \alpha_4 + \omega_4 = 90,$$

$$(17) \quad \alpha_2 + \alpha_4 = m\alpha,$$

$$(21) \quad 6 \leq m \leq 180.$$

$$(18) \quad \beta_3 = m\beta,$$

Dalle (21), (18), (9) segue  $6\beta \leq \beta_3 \leq 80$ , ossia  $\beta < 14$ . Adunque  $K$  non può coincidere con  $I$ ; quindi si ha:

$$r \leq 12, \quad m \geq 30, \quad \beta \leq \frac{80}{30} < 3.$$

Dovendo  $\beta$  essere pari, sarà  $\beta = 2$  o  $\beta = 0$ .

Per  $p = 2$ ,  $H$  contiene sostanziali d'ordine  $\gamma$ , e deve essere divisibile per  $\gamma$ , sicché potrà essere  $r = \gamma$ , i.e.  $n =$  corrispondentemente  $n = 120, 60, 30$ . In tutti questi casi, non essendo divisibile per  $\gamma$ , dev'essere  $\gamma = 0$ , quindi per le (7), (15)  $a_1 = 120$ , e per la (16)  $n \leq 45$ , che è impossibile. Per  $\delta = r$  si ha tale (18), (9)  $a_1 = 60$ , quindi per le (16), (15)  $n \leq 30$ ,  $r \leq \frac{30}{\gamma} < \gamma$ , cioè  $r = 2, 3, 4$ , e corrispondentemente  $n = 120, 60, 30$ . In tutti questi casi dev'essere  $\gamma = 0$ , quindi  $a_1 = 144$ , e per la (16)  $n \leq 1 + a_1 - a_2 = 225$ , che è impossibile. Adunque anche per  $s = 6$  non può esistere isomorfismo tra  $H$  e  $L$ .

6. Considerando, le equazioni generali di grado superiore al  $\gamma^*$  non sono risolvibili mediante l'applicazione dell'irriducibilità insedrica. Si deduce così dalle considerazioni esposte, che, se l'equazione generale di un determinato grado  $s > \gamma^*$  si rende risolvibile (nel senso del n° 2) quando si incida nella classe  $C$ , oltre le equazioni bilineari e l'equazione isotetradrica, qualche altra famiglia di equazioni, non può avvenire, né che la  $R_s$  sia un'equazione bilineare di  $\gamma^*$  grado e la  $R_s$  un'equazione isotetradrica, né che la  $R_s$  sia un'equazione irriducibile.

Milano, 21 aprile 1897,

G. VIVANTE

## SU DI UN TEOREMA DI GEOMETRIA PROIETTIVA.

## OSSERVAZIONI

del Dr. Errico Ascione.

---

Adunanza del 14 aprile 1895. — Verbali.

Il tomo IX in corso dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo contiene una Nota del sig. E. Maccaferri intitolata: « *Su di un teorema fondamentale relativo agli elementi comuni di due coniche in un piano* ».

A pag. 98 è trattata una proposizione (insieme alla duale nel piano) relativa alle coniche, della quale, come ivi è detto, si suol dare una dimostrazione basata sul concetto intuitivo del movimento continuo di un punto (o di una tangente per la proposizione duale) su di una conica; ed a pie' di pagina è posta la seguente annotazione: « *Vedi ad es. Sannia, Geom. proiettiva, 1<sup>a</sup> ediz., pag. 402. La dimostrazione che è nella 2<sup>a</sup> edizione della Geom. proiettiva del Sannia a pag. 172-3 (nº 86, g) non ha senso, non so se per errori di stampa o per altro.*

Mi si concedano brevi parole su questo argomento. È fuori di dubbio che la dimostrazione data nella 1<sup>a</sup> ediz. a pag. 402 si fondava precisamente sul concetto intuitivo del movimento continuo di un punto (o di una tangente) sulla conica. Ed è appunto ciò che il mio compianto Maestro con quel rigore che caratterizzava il suo metodo d'insegnamento di Geometria proiettiva, cercò di evitare, sostituendo un'altra dimostrazione che è quella del n° 86, g della 2<sup>a</sup> edizione.

Ora in essa è incorsa effettivamente qualche inesattezza di stampa. I tre ultimi righi della pag. 172 debbono leggersi così: « *E poichè se ad es. il punto A trovasi nell'ʌ completo SUS<sub>1</sub>, le rette AS, AS<sub>1</sub> penetrano ambedue nel ʌ SUS<sub>1</sub> o niuna di esse vi penetra, ...* ». Analogamente nella nota a pag. 172 alla A deve sostituirsi la U.

Fatta questa modificazione, da postulati ovvii sui segmenti segue che i punti MM<sub>1</sub> non separano UR se la r è nell'ʌ completo SUS<sub>1</sub>, che comprende A e li separano se r giace nell'altro angolo completo. Che se il punto A non si trovasse nell'ʌ completo SUS<sub>1</sub> si farebbe un ragionamento analogo.

Questa correzione, che fu indicata dal prof. Sannia stesso ai suoi alunni, era destinata a comparire nell'Errata-corrigere alla fine del libro.

Del resto anche senza di essa, la dimostrazione di cui si tratta bastava a suggerire al sig. Maccaferri una dimostrazione completa: poichè se ai due righi antipenultimo e penultimo della pag. 172 si sostituisce « *E poichè il gruppo URMM<sub>1</sub> è prospettivo al gruppo (UA, r, s, s<sub>1</sub>)* » e poi si attacca con evidentemente le tre coppie ..., sopprimendo la nota in pie' di pagina, la dimostrazione del n° 86, g diventa identica a quella che espone il sig. Maccaferri.

Caserta, 21 marzo 1895.

---

E. ASCIONE

## SULLA CONGRUENZA GENERALE DI 4° GRADO

SECONDO UN MODULO PRIMO.

Nota di **Gerolamo Cordoné**, in Genova.Adunanza del 12 e 26 maggio 1895.

La teoria generale delle congruenze di 2°, 3° e 4° grado secondo un modulo primo fu iniziata da Cauchy nel vol. IV dei suoi *Exercices de Mathématiques*, ov'egli si limita però al caso in cui le congruenze in questione ammettono tante radici razionali, quante unità sonvi nel loro grado.

La discussione generale della congruenza di 3° grado fu compiuta da Oltramare (vol. 45 del Journal von Crelle), il quale non solo determinò le condizioni necessarie e sufficienti perchè la proposta ammetta una o più radici razionali, ma diede altresì l'espressione esplicita delle radici in funzione razionale dei coefficienti della congruenza e del suo modulo.

Per quanto riguarda la congruenza generale del 4° grado secondo un modulo primo, la questione, a nostra conoscenza, è ancora insoluta. È dunque di tale discussione che ci occuperemo in questo lavoro, dove, pure traendo partito dei risultati dell'Oltramare concernenti la congruenza generale di 3° grado, mostreremo come si possano in più punti semplificare e completare.

Ci limiteremo però a dare sotto forma razionale soltanto una o al più due radici della congruenza proposta, quand'anche essa ne ammetta un numero maggiore; e riguarderemo le espressioni della forma

$$\sqrt[n]{a}$$

( $a$  razionale), come razionalmente note, semprechè la congruenza

$$x^n - a \equiv 0 \pmod{\mu}$$

sia risolubile.

1. Nella teoria delle congruenze irriducibili secondo un modulo primo, si dimostra che una congruenza qualunque di grado  $v$ , ammette  $v$  radici. Quindi la congruenza generale di 4° grado con modulo primo, ammetterà sempre quattro radici, razionali o no; e si potrà avere un'espressione analitica delle radici, ricorrendo agli stessi metodi coi quali si ottengono per radicali le radici della equazione di 4° grado.

Si tratterà poi di ricercare in quali casi le espressioni ottenute si riducono a numeri razionali.

Noi adotteremo il metodo dal prof. Giudice esposto nel vol. II della Rivista di Matematica (Peano).

## 2. Consideriamo la congruenza

$$(1) \quad y^4 + 4by^3 + 6cy^2 + 4dy + e \equiv 0 \pmod{\mu},$$

$\mu$  essendo un numero primo diverso da 2 e 3, e  $b, c, d, e$  numeri razionali qualunque.

Poniamo per brevità :

$$a) \quad H \equiv c - b^2$$

$$b) \quad I \equiv e - 4bd + 3c^2$$

$$c) \quad G \equiv d - 3bc^2 + 2b^3 \pmod{\mu}$$

$$d) \quad J = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} \equiv HI - G^2 - 4H^3$$

$$e) \quad \Delta \equiv P - 27P.$$

Se si pone :

$$(2) \quad x \equiv y + b \pmod{\mu},$$

la congruenza (1) si trasforma nella seguente:

$$A) \quad x^4 + 6Hx^3 + 4Gx^2 + I - 3H^2 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

che si può considerare come la forma generale della congruenza di 4° grado,  $H$ ,  $G$  e  $I - 3H^2 \equiv K$  ( $\pmod{\mu}$ ) essendo numeri affatto arbitrarii.

Supponiamo che  $x$  sia della forma :

$$(3) \quad x \equiv t\sqrt[4]{\zeta} + \sqrt[4]{\zeta^2} + u\sqrt[4]{\zeta^3} \pmod{\mu},$$

$t$ ,  $\zeta$ ,  $u$  essendo quantità indeterminate. Indicando con  $\alpha$  una radice primitiva della congruenza

$$\alpha^4 \equiv 1 \pmod{\mu}$$

si vede che il prodotto

$$P(x) \equiv \prod_{i=0}^3 (x - \alpha^i t\sqrt[4]{\zeta} - \alpha^{2i}\sqrt[4]{\zeta^2} - \alpha^{3i}\sqrt[4]{\zeta^3}) \pmod{\mu}$$

si riduce a una funzione intera di 4° grado in  $x$ , i cui coefficienti sono razionali in  $t$ ,  $u$  e  $\zeta$ .

Confrontando le stesse potenze di  $x$  nella funzione  $P(x)$  e nel 1° membro della proposta (A), si trovano tre equazioni di condizione nelle  $\zeta$ ,  $t$  e  $u$  e per eliminazione delle due ultime, si trae

$$B) \quad 4\zeta^3 + 12H\zeta^2 + (12H^2 - I)\zeta - G^2 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

che si può chiamare la *risolvente* di 3° grado della congruenza (A) (\*).

(\*) La risolvente che si otterrebbe col metodo di Ferrari non differisce da quella del prof. Giudice che per fattore 16 che in quella moltiplica tutte le radici.

Le radici  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  della (B) saranno date dalle formole:

$$(4) \quad \begin{aligned} \zeta_1 &\equiv -H + \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \\ \zeta_2 &\equiv -H + \frac{1}{2}(fR_1 + f^2R_2) \pmod{\mu} \\ \zeta_3 &\equiv -H + \frac{1}{2}(f^2R_1 + fR_2) \end{aligned}$$

dove s'è posto per brevità:

$$(5) \quad R_1 \equiv \sqrt[3]{-J + \sqrt{J^2 - \left(\frac{I}{3}\right)^3}} \quad R_2 \equiv \sqrt[3]{-J - \sqrt{J^2 - \left(\frac{I}{3}\right)^3}}$$

$$(6) \quad f \equiv -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} \quad f^2 \equiv -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}.$$

Indicando con  $x_1, x_2, x_3, x_4$  le radici della proposta, si trova come nell'articolo citato del prof. Giudice:

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 \equiv \sqrt{-\zeta_1} + \sqrt{-\zeta_2} + \sqrt{-\zeta_3}, & x_3 \equiv -\sqrt{-\zeta_1} + \sqrt{-\zeta_2} - \sqrt{-\zeta_3} \\ x_2 \equiv \sqrt{-\zeta_1} - \sqrt{-\zeta_2} - \sqrt{-\zeta_3}, & x_4 \equiv -\sqrt{-\zeta_1} - \sqrt{-\zeta_2} + \sqrt{-\zeta_3} \end{cases}$$

dove i segni dei radicali devono essere scelti in modo da verificare la relazione:

$$(8) \quad \sqrt{-\zeta_1}\sqrt{-\zeta_2}\sqrt{-\zeta_3} = -\frac{G}{2}.$$

Si riconosce facilmente che se la funzione:

$$\Delta \equiv P - 27J^2$$

è congrua a zero ( $\pmod{\mu}$ ), la cong. (A) ha delle radici uguali, e inversamente; perciò, adottando una denominazione propria della Teoria delle Equazioni,  $\Delta$  può dirsi il *discriminante* della proposta.

3. Prima di studiare la congruenza (A) in tutta la sua genera-

lità, conviene considerare il caso particolare in cui si ha

$$G \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Allora la proposta si risolve come una congruenza di 2° grado, e si conclude facilmente il teorema seguente :

**TEOREMA I.**

a) *Sia K un numero tale che sia*

$$K^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \pmod{\mu}.$$

*La congruenza :*

$$(9) \quad x^4 + 6Hx^2 + K \equiv 0 \pmod{\mu}$$

*ammetterà quattro radici razionali o nessuna secondochè sia soddisfatta o no la condizione*

$$(10) \quad (-3H + \sqrt{9H^2 - K})^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \pmod{\mu}.$$

b) *Se invece*

$$K^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\mu},$$

*la congruenza precedente ammetterà due radici razionali o nessuna, secondochè sarà o no verificata una delle due condizioni*

$$(11) \quad (-3H + \sqrt{9H^2 - K})^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1, \quad (-3H - \sqrt{9H^2 - K})^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1.$$

c) *Se infine*

$$K \equiv 0 \pmod{\mu}$$

*la cong. (9), che può scriversi*

$$x^2(x^2 + 6H) \equiv 0 \pmod{\mu}$$

*ammetterà (oltre alle due radici congrue a zero) due radici razionali o*

nessuna secondo che si avrà:

$$(-6H)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv +1, \text{ oppure } (-6H)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv -1.$$

a) Se la condizione (10) è soddisfatta, non solo  $\sqrt[2]{9H^2 - K}$  è un numero razionale, ma  $(-3H + \sqrt[2]{9H^2 - K})$  è residuo quadratico secondo il modulo  $\mu$ .

D'altronde, osservando che

$$(-3H + \sqrt[2]{9H^2 - K})(-3H - \sqrt[2]{9H^2 - K}) \equiv K$$

e quindi:

$$\begin{aligned} & (-3H + \sqrt[2]{9H^2 - K})^{\frac{\mu-1}{2}}(-3H - \sqrt[2]{9H^2 - K})^{\frac{\mu-1}{2}} \\ & \equiv (-3H - \sqrt[2]{9H^2 - K})^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv K^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv +1 \end{aligned}$$

si vede che anche  $(-3H - \sqrt[2]{9H^2 - K})$  è residuo quadratico, eppero la proposta ammette quattro radici razionali, comprese nell'equazione

$$x \equiv \pm \sqrt{-3H \pm \sqrt{9H^2 - K}}.$$

Inversamente, se la (10) non è soddisfatta,  $\sqrt{-3H + \sqrt{9H^2 - K}}$  e  $\sqrt{-3H - \sqrt{9H^2 - K}}$  sono entrambe irrazionali; e la proposta non può ammettere alcuna radice razionale.

b) e c) Con un ragionamento analogo al precedente si riconosce l'esattezza della 2<sup>a</sup> parte (b) del teorema; la 3<sup>a</sup> parte, (c), è evidente, in forza della teoria delle congruenze binomie.

4. Le radici della cong. (9) possonsi esprimere razionalmente in funzione del modulo  $\mu$ , dei coefficienti della congruenza e di una radice primitiva di  $\mu$ .

È ciò che risulta dal teorema seguente, che è facile verificare.

**TEOREMA II.** — *Sia  $\mu = 2^m \mu_1 + 1$  ( $\mu_1$  impari) un numero primo.*

a una radice primitiva per numero  $\mu$ , e  $N$  un numero tale che sia :

$$N^{\mu} \equiv a^{\frac{\mu-1}{2m-1}} \pmod{\mu},$$

i essendo un termine determinato della serie 1, 2, ...,  $2^{m-1}$ .

Le radici della congruenza :

$$x^4 \equiv N \pmod{\mu}$$

saranno date dalla formula :

$$x \equiv \pm N^{\frac{\mu-1}{4}} a^{\frac{\mu-1}{2m}} \pmod{\mu}.$$

5. Passando ora allo studio della congruenza :

$$(A) \quad x^4 + 6Hx^2 + 4Gx + K \equiv 0 \pmod{\mu}$$

considerata in tutta la sua generalità, converrà distinguere tre casi principali :

$$\text{I.} \quad -\frac{\Delta}{27} \equiv 0$$

$$\text{II.} \quad \left(-\frac{\Delta}{27}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv +1 \pmod{\mu}$$

$$\text{III.} \quad \left(-\frac{\Delta}{27}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv -1.$$

$$\text{I.} \quad -\frac{\Delta}{27} \equiv 0. \quad (C)$$

6. Applicando alla nostra congruenza (A) un ragionamento analogo a quello del Prof. Giudice circa la equazione del 4° grado a discriminante nullo, si conclude facilmente il seguente :

**TEOREMA III.** — Se I e J sono numeri tali che

$$-\frac{\Delta}{27} = J^2 - \left(\frac{I}{3}\right)^3 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

la congruenza (A) ammetterà :

a) Per  $J \equiv 0$ ,  $H \not\equiv 0$  (mod.  $\mu$ ) (\*): Quattro radici razionali di cui tre uguali fra loro, cioè:

$$x_1 \equiv 3\sqrt{-H} \equiv -\frac{6H}{G} \equiv \frac{3G}{2H}$$

$$x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv -\sqrt{-H} \equiv \frac{2H}{G} \equiv -\frac{G}{2H}$$

b)  $J \not\equiv 0$ ,  $J \equiv 8H^3 \not\equiv 0$ :

$$\begin{cases} (-3H)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv +1 & \text{Due radici doppie razionali:} \\ & x_1 \equiv x_2 \equiv +\sqrt{-3H}, \quad x_3 \equiv x_4 \equiv -\sqrt{-3H}. \\ (-3H)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv -1 & \text{Nessuna radice razionale.} \end{cases}$$

c)  $J \not\equiv 0$ ,  $J \not\equiv 8H^3$ :

$$\begin{cases} \text{Una radice doppia razionale ed due semplici razionali:} \\ i) x_1 \equiv \sqrt{-H - \frac{3J}{I}} + 2\sqrt{-H + \frac{3J}{2I}} \\ = -\frac{GI}{3J - 2HI} + 2\sqrt{-H + \frac{3J}{2I}} \\ k) x_2 \equiv -\frac{GI}{3J - 2HI} - 2\sqrt{-H + \frac{3J}{2I}} \\ x_3 \equiv x_4 \equiv -\sqrt{-H - \frac{3J}{I}} \equiv \frac{GI}{3J - 2HI} \\ \text{Una radice doppia razionale:} \\ \left(-H + \frac{3J}{2I}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv -1 \\ x_1 \equiv x_2 \equiv -\sqrt{-H - \frac{3J}{I}} \equiv \frac{GI}{3J - 2HI} \end{cases}$$

---

(\*) Adoperiamo in generale la notazione  $a \not\equiv b$  (mod.  $\mu$ ) per indicare che  $a$  e  $b$  sono incongrui secondo il modulo  $\mu$ .

OSSERVAZIONE. — Si potrebbe credere che, come lo s'è fatto nel caso a) per radicale  $\sqrt{-H}$ , anche nel 3° caso, c), si possa esprimere direttamente  $\sqrt{-H + \frac{3J}{2I}}$ , e quindi  $x_1$  e  $x_2$  in funzione razionale dei coefficienti della proposta. Ma le formole che si otterrebbero in questo caso sono illusorie. Invero, se si pone per brevità :

$$\rho = -\frac{GI}{3J - 2HI} = -\sqrt{\zeta_1}, \quad v = 4\left(-H + \frac{3J}{2I}\right) = 4\zeta_2 = 4\zeta,$$

$x \equiv \rho \pm \sqrt{v}$  deve soddisfare identicamente alla congruenza (A), cioè si deve avere :

$$(12) (\rho + \sqrt{v})^4 + 6H(\rho + \sqrt{v})^3 + 4G(\rho + \sqrt{v}) + K \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Donde segue

$$(13) \sqrt{v} = -\frac{v^2 + v(6\rho^2 + 6H) + \rho^2(6H + \rho^2) + 4G\rho + K}{4\rho^4 + 4\rho^3 + 12H\rho + 4G}.$$

Ed osservando che si ha, tenendo conto della (B) :

$$4\rho^6 + 12H\rho^4 + (12H^2 - I)\rho^2 - G^2 \equiv 0$$

$$4\rho^4 + 4\rho^3 + 12H\rho + 4G \equiv 0$$

$$v^2 + v(6\rho^2 + 6H) + \rho^2(6H + \rho^2) + 4G\rho + K$$

$$= \frac{1}{16\rho^2} [4\rho(6\rho^2 + 6H + v) - (4\rho^3 + 12H\rho + 4G)][4\rho^4 + 4\rho^3 + 12H\rho + 4G] \\ - \frac{1}{\rho^2} [4\rho^6 + 12H\rho^4 + (12H^2 - I)\rho^2 - G^2] \equiv 0 \pmod{\mu}$$

si vede che la frazione (13) si presenta sotto la forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ .

$$\text{II. } -\left(\frac{\Delta}{27}\right)^{\frac{1}{2}} \equiv +1. \quad (D)$$

7. Considereremo separatamente due casi, quello in cui il modulo  $\mu$  è della forma  $\mu = 6n - 1$ , e quello in cui  $\mu = 6n + 1$ .

$$A) \quad \mu = 6n + 1.$$

Data la forma del numero  $\mu$ , ed essendo per ipotesi —  $\frac{\Delta}{27}$  — residuo quadratico, la risolvente della proposta, cioè :

$$(B) \quad 4\zeta^3 + 12H\zeta^2 + (12H^2 - I)\zeta - G^2 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

ammette, com'è noto (\*), una radice razionale  $\zeta_1$ , e due irrazionali  $\zeta_2$  e  $\zeta_3$  della forma :

$$(14) \quad \zeta_2 \equiv \varphi + \psi \sqrt{-3\left(\frac{-\Delta}{27}\right)} \quad \zeta_3 \equiv \varphi - \psi \sqrt{-3\left(\frac{-\Delta}{27}\right)}$$

$\varphi$  e  $\psi$  essendo numeri razionali, e  $\sqrt{-3\left(\frac{-\Delta}{27}\right)} = \sqrt{\Delta}$ , essendo irrazionale per la forma del modulo  $\mu$ , e per la (D).

Ciò posto, indichiamo con

$$(15) \quad x \equiv \varepsilon_1 \sqrt{\zeta_1} + \varepsilon_2 \sqrt{\zeta_2} + \varepsilon_3 \sqrt{\zeta_3} \pmod{\mu}$$

$$[\varepsilon_1^3 \equiv \varepsilon_2^3 \equiv \varepsilon_3^3 \equiv 1 \pmod{\mu}]$$

una qualunque delle radici della proposta, e facciamo successivamente le tre ipotesi seguenti :

$$a) \quad \zeta_1 \equiv 0$$

$$b) \quad \zeta_1^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv -1$$

$$c) \quad \zeta_1^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv +1$$

$$8. a) \quad \zeta_1 \equiv 0.$$

Se una delle radici della risolvente è nulla (mod.  $\mu$ ), si deve avere :

$$G \equiv 0 \pmod{\mu}$$

(\*) Vedi Oltremare art. citato, Teor. II.

e quindi si ricade nel caso considerato al n° 3.

$$b) \quad \zeta_1^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1.$$

Affinchè  $x$  sia razionale, bisogna che sia

$$x^p \equiv (\epsilon_1 \sqrt[p]{\zeta_1} + \epsilon_3 \sqrt[p]{\zeta_3} + \epsilon_5 \sqrt[p]{\zeta_5})^p \equiv \epsilon_1 \sqrt[p]{\zeta_1} + \epsilon_3 \sqrt[p]{\zeta_3} + \epsilon_5 \sqrt[p]{\zeta_5} \pmod{p}$$

cioè, osservando che

$$(\sqrt[p]{\zeta_1})^p \equiv -\sqrt[p]{\zeta_1}, \quad (\sqrt[p]{\zeta_3})^p \equiv \sqrt[p]{\zeta_3}, \quad (\sqrt[p]{\zeta_5})^p \equiv \sqrt[p]{\zeta_5} \pmod{p};$$

$$(16) \quad -2\epsilon_1 \sqrt[p]{\zeta_1} + (\epsilon_3 - \epsilon_5) \sqrt[p]{\zeta_3} + (\epsilon_5 - \epsilon_3) \sqrt[p]{\zeta_5} \equiv 0.$$

Se si potesse avere :

$$\epsilon_3 \equiv \epsilon_5,$$

si avrebbe altresì :

$$\zeta_1 \equiv 0,$$

cioè che è contro l'ipotesi; dunque le radici  $x_1$  e  $x_2$  della proposta non possono essere razionali.

Le supposizioni :

$$\epsilon_1 \equiv \epsilon_3 \equiv -1, \quad \epsilon_5 \equiv 1,$$

$$\epsilon_1 \equiv \epsilon_3 \equiv -1, \quad \epsilon_5 \equiv 1,$$

corrispondenti rispettivamente alla terza e quarta radice della (A), conducono alle relazioni

$$(17) \quad \sqrt[p]{\zeta_1} \equiv \sqrt[p]{\zeta_2} - \sqrt[p]{\zeta_3}, \quad \sqrt[p]{\zeta_1} \equiv \sqrt[p]{\zeta_3} - \sqrt[p]{\zeta_5} \pmod{p}.$$

Dunque in questi due casi una delle radici della proposta è nulla (mod.  $p$ ). Si deve dunque avere :

$$K \equiv I - 3H^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

e la proposta, soppressa la radice congrua a zero, si riduce all'  
gruenza di 3° grado :

$$(18) \quad x^3 + 6Hx + 4G \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Ora per ipotesi si ha :

$$-\frac{\Delta}{27} \equiv J^3 - \left(\frac{I}{3}\right)^3 \equiv J^3 - H^3 \equiv (J + H^3)(J - H^3) \equiv s^3 \pmod{\mu}$$

$s$  essendo una quantità razionale.

E per la relazione d) n° 2 :

$$G^3 \equiv -J + H(I - 4H^3) \equiv -J - H^3$$

donde :

$$J + H^3 \equiv -G^3, \quad J - H^3 \equiv -G^3 - 2H^3,$$

$$G^3(G^3 + 2H^3) \equiv s^3, \quad G^3 + 2H^3 \equiv \left(\frac{s}{G}\right)^3 \pmod{\mu}.$$

Se si confronta la congruenza (18) colla seguente

$$(19) \quad x^3 + 3px + 2q \equiv 0 \pmod{\mu = 6n-1}$$

di cui nel teorema II dell'Oltramare, si vede che :

$$(q^3 + p^3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv [4G^3 + 2H^3]^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1.$$

Dunque la (18) ammette una sola radice razionale, appartenente alla proposta (A).

Se si pone per brevità :

$$M \equiv \frac{1}{2} \{ [-2G + \sqrt{4G^3 + 8H^3}]^{2n} + [-2G - \sqrt{4G^3 + 8H^3}]^{2n} \}$$

le uniche radici razionali della proposta saranno

$$(20) \quad x \equiv 0, \quad x \equiv -\frac{2G}{H + M}.$$

9. Non sarà privo d'interesse il far vedere come si possa p

venire in modo più semplice ai risultati consegnati nel teorema II dell'Oltramare, e concernenti la congruenza (19).

Posto :

$$(21) \quad S_1 \equiv \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, \quad S_2 \equiv \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \pmod{\mu}$$

$$(S_1 S_2 \equiv -p)$$

le radici della (19) saranno della forma :

$$(22) \quad x \equiv f^i S_1 + f^{2i} S_2 \quad (i = 0, 1, 2).$$

Ora l'espressione (22) non può essere razionale a meno che sia :

$$(f^i S_1 + f^{2i} S_2)^\mu \equiv f^{i\mu} S_1^\mu + f^{2i\mu} S_2^\mu \equiv f^i S_1 + f^{2i} S_2$$

cioè (essendo  $f^{i\mu} \equiv f^{2i}$ ,  $f^{2i\mu} \equiv f^i$ ,  $S_1^\mu \equiv S_1$ ,  $S_2^\mu \equiv S_2$ ):

$$f^i \equiv f^{2i}$$

ciò che esige che sia :

$$i = 0.$$

L'unica radice razionale della (19) è dunque :

$$x \equiv S_1 + S_2.$$

D'altronde :

$$S_1^{\mu} \equiv S_2^{\mu} \equiv (-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{\mu} \pmod{\mu}$$

$$S_1 \equiv \varepsilon_1 (-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{\mu} \quad (\varepsilon_1^2 \equiv 1).$$

da cui :

$$S_1^3 \equiv -q + \sqrt{q^2 + p^3} \equiv \varepsilon_1 (-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{\mu}$$

$$\varepsilon_1 \equiv (-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{\mu-1}.$$

Dunque :

$$x \equiv S_1 + S_2 \equiv (-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{\mu-1} - \frac{p}{(-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{\mu-1}}$$

$$\equiv (-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{\mu-1} + (-q - \sqrt{q^2 + p^3})^{\mu-1}$$

ossia ponendo :

$$M' \equiv \frac{1}{2} \left\{ (-q + \sqrt{q^2 + p^2})^{4n-1} + (-q - \sqrt{q^2 + p^2})^{4n-1} \right\},$$

$$x \equiv 2M' \pmod{\mu}.$$

Se si applicano queste formole alla congruenza (18) si trova :

$$(23) \quad x \equiv 2M' \equiv [-2G + \sqrt{4G^2 + 8H^2}]^{4n-1} + [-2G - \sqrt{4G^2 + 8H^2}]^{4n-1}.$$

10. c)  $\zeta_1^{\frac{4n-1}{2}} \equiv +1.$

Se :

$$x \equiv \epsilon_1 \sqrt{\zeta_1} + \epsilon_2 \sqrt{\zeta_2} + \epsilon_3 \sqrt{\zeta_3},$$

è razionale, dovrà aversi :

$$(\epsilon_1 \sqrt{\zeta_1} + \epsilon_2 \sqrt{\zeta_2} + \epsilon_3 \sqrt{\zeta_3})^4$$

$$\equiv (\epsilon_1 \sqrt{\zeta_1} + \epsilon_2 \sqrt{\zeta_2} + \epsilon_3 \sqrt{\zeta_3}) \equiv \epsilon_1 \sqrt{\zeta_1} + \epsilon_2 \sqrt{\zeta_2} + \epsilon_3 \sqrt{\zeta_3}$$

cioè :

$$(\epsilon_2 - \epsilon_3) \sqrt{\zeta_2} \equiv (\epsilon_2 - \epsilon_3) \sqrt{\zeta_3},$$

donde, dovendo essere per ipotesi :

$$\sqrt{\zeta_2} \neq \sqrt{\zeta_3},$$

si ha :

$$\epsilon_2 \equiv \epsilon_3,$$

Sicchè, se la proposta ammette delle radici razionali, soltanto le due prime,  $x_1$  e  $x_2$ , possono essere tali.

Ma se  $x$  è razionale, lo è pure  $x - \sqrt{\zeta_1}$ , cioè :

$$x - \sqrt{\zeta_1} \equiv (\sqrt{\zeta_1} + \sqrt{\zeta_2}) \equiv (\sqrt{\varphi + \psi \sqrt{\Delta_1}} + \sqrt{\varphi - \psi \sqrt{\Delta_1}}) \pmod{\mu}.$$

Ciò richiede che si possa porre :

$$\sqrt{\varphi + \psi \Delta_i} = \varphi_i + \psi_i \sqrt{\Delta_i},$$

$\psi_i$  indicando numeri razionali.

Reciprocamente, se la condizione (24) è soddisfatta,  $x_1$  e  $x_2$  sono razionali, e precisamente :

$$x_1 = \sqrt{\zeta_1} + 2\varphi_1, \quad x_2 = \sqrt{\zeta_1} - 2\varphi_1.$$

In virtù della teoria delle congruenze irriducibili, la condizione equivale alla seguente :

$$\zeta_2^{\frac{\mu^2-1}{2}} \equiv (\varphi + \psi t)^{\frac{\mu^2-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

endo una radice della congruenza irriducibile

$$t^2 - \Delta_1 \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

La condizione di possibilità (24') è soddisfatta di per sé. Insì ha :

$$\zeta_2^{\mu+1} \equiv \zeta_1 \zeta_2 \pmod{\mu}.$$

Ed elevando i due membri alla potenza  $\frac{\mu-1}{2} = 3n-1$ :

$$\zeta_2^{\frac{\mu^2-1}{2}} \equiv (\zeta_1 \zeta_2)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv \left(\frac{G^2}{4\zeta_1}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv \frac{\left(\frac{G}{2}\right)^{\mu-1}}{\zeta_1^{\frac{\mu-1}{2}}} \equiv +1. \quad \text{C. v. D.}$$

Per esprimere le radici della proposta in funzione razionale dei coefficienti e del modulo, poniamo :

$$\left(-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}\right)^{4n-1} \equiv R + S \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \pmod{\mu},$$

Sindicando rispettivamente la parte indipendente da  $\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}$  e il

coefficiente di  $\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}$  nello sviluppo di  $(-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}})^{4^{n-1}}$

secondo la formula del binomio.

Si avrà :

$$(25) \quad \begin{cases} R_1 = \sqrt[3]{-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} = (-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}})^{\frac{4^{n-1}-1}{3}} = R + S\sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \\ R_2 = \sqrt[3]{-J - \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} = (-J - \sqrt{-\frac{\Delta}{27}})^{\frac{4^{n-1}-1}{3}} = R - S\sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \end{cases}$$

e quindi :

$$(26) \quad \begin{cases} V_{\zeta_1}^- = \sqrt{-H + R} \\ V_{\zeta_2}^- = \sqrt{-H - \frac{R}{2} + \frac{S}{2}\sqrt{\Delta_1}} = \varphi_1 + \psi_1 V_{\Delta_1}^- \\ V_{\zeta_3}^- = \sqrt{-H - \frac{R}{2} - \frac{S}{2}\sqrt{\Delta_1}} = \varphi_1 - \psi_1 V_{\Delta_1}^- \end{cases}$$

con :

$$\varphi = -H - \frac{R}{2}, \quad \psi = \frac{S}{2}.$$

Se si pone :

$$\zeta_1^{3^{n-1}} = (\varphi + \psi V_{\Delta_1}^-)^{3^{n-1}} = M + N V_{\Delta_1}^- \quad (\text{mod. } \mu)$$

( $M$  e  $N$  essendo numeri razionali), si trova :

$$(27) \quad \begin{cases} (V_{\zeta_1}^-)^{6^{n-2}} = \zeta_1^{3^{n-1}} = \frac{V_{\zeta_1}^-}{V_{\zeta_2}^-} = \frac{\varphi_1 - \psi_1 V_{\Delta_1}^-}{\varphi_1 + \psi_1 V_{\Delta_1}^-} = M + N V_{\Delta_1}^- \\ (V_{\zeta_2}^-)^{6^{n-2}} = \zeta_3^{3^{n-1}} = \frac{V_{\zeta_2}^-}{V_{\zeta_3}^-} = \frac{\varphi_1 + \psi_1 V_{\Delta_1}^-}{\varphi_1 - \psi_1 V_{\Delta_1}^-} = M - N V_{\Delta_1}^- \end{cases}$$

da cui :

$$(28) \quad \begin{cases} \varphi_i M + \psi_i N \Delta_i \equiv \varphi_i \\ \varphi_i N + \psi_i M \equiv -\psi_i \end{cases} \pmod{\mu}$$

all'una delle quali relazioni si può sostituire la seguente :

$$(29) \quad M^2 - N^2 \Delta_i \equiv 1 \pmod{\mu}.$$

Dalle (26) si deduce poi :

$$(30) \quad \varphi \equiv \varphi_i^2 + \psi_i^2 \Delta_i$$

$$(31) \quad \psi \equiv 2 \varphi_i \psi_i.$$

E dalle (28) e (31) :

$$\psi_i \equiv \pm \sqrt{-\frac{N\psi}{2(M+1)}},$$

per cui  $\psi_i$  si può considerare come razionalmente noto in funzione dei coefficienti della proposta e del modulo.

Se si osserva che :

$$\sqrt{\zeta_2} \sqrt{\zeta_3} \equiv \varphi_i^2 - \psi_i^2 \Delta_i \equiv -\frac{G}{2\sqrt{\zeta_i}},$$

si ottiene dalle (28), (29) e (31) :

$$4\varphi_i^2 \equiv -\frac{G(M+1)}{\sqrt{\zeta_i}} \equiv \frac{\psi^2}{\psi_i^2} \equiv -\frac{2\psi(M+1)}{N} \equiv -\frac{S(M+1)}{N},$$

ossia :

$$\sqrt{\zeta_i} \equiv \frac{GN}{S}.$$

Dunque :

$$(32) \quad \begin{cases} x_1 \equiv \sqrt{-\zeta_i + 2\varphi_i} \equiv \frac{GN}{S} + \sqrt{-\frac{S(M+1)}{N}} \pmod{\mu}, \\ x_2 \equiv \sqrt{-\zeta_i - 2\varphi_i} \equiv \frac{GN}{S} - \sqrt{-\frac{S(M+1)}{N}} \end{cases}$$

11. I risultati di cui ai numeri 9 e 10 si possono riassumere nel seguente teorema :

**Teorema IV.** — Siano  $J$  e  $I$  numeri tali che :

$$\left(-\frac{\Delta}{27}\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \pmod{\mu = 6n-1}$$

e posto :

$$R_i \equiv \sqrt[3]{-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} \equiv \left(-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv R + S\sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \pmod{\mu}$$

sia :

$$\zeta_i \equiv -H + R$$

l'unica radice razionale della cong. (B). Se :

a)  $\zeta_i^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ , la congruenza (A) ammetterà due radici razionali date dalle formole :

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 0, \quad x_2 \equiv [-G + \sqrt{4G^2 + 8H}]^{\frac{p-1}{2}} \\ &+ [-2G - \sqrt{4G^2 + 8H}]^{\frac{p-1}{2}} \pmod{\mu}. \end{aligned}$$

(\*) Se si cercasse di eliminare da queste ultime formole il radicale  $\sqrt{-\frac{S(M+1)}{N}}$ , esprimendo che  $x_i$  deve soddisfare identicamente alla proposta (A), si perverrebbe, come per le formole i) e k) (n° 6), a delle espressioni indeterminate.

b)  $\zeta_i^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1$ , posto

$$\left[ \left( -H - \frac{R}{2} \right) + \frac{S}{2} \sqrt{-\frac{\Delta}{9}} \right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv M + N \sqrt{-\frac{\Delta}{9}} \quad (M \text{ e } N \text{ razionali})$$

ammetterà due radici razionali date da :

$$x_1 \equiv \frac{GN}{S} + \sqrt{-\frac{S(M+1)}{N}} \quad x_2 \equiv \frac{GN}{S} - \sqrt{-\frac{S(M+1)}{N}}.$$

c)  $\zeta_i \equiv 0$ , la cong. (A) ammetterà delle radici razionali nei casi indicati dal Teor. I.

$$12). \quad B) \quad \mu = 6n + 1.$$

Anche qui converrà distinguere tre casi :

$$a) \quad R_i^{\frac{p-1}{3}} \equiv \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)^{\frac{2n}{3}} \equiv 1,$$

$$b) \quad R_i^{\frac{p-1}{3}} \equiv \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)^{\frac{2n}{3}} \equiv f,$$

$$c) \quad R_i^{\frac{p-1}{3}} \equiv \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)^{\frac{2n}{3}} \equiv f^2.$$

$$13. \quad a) \quad R_i^{\frac{p-1}{3}} \equiv \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)^{\frac{2n}{3}} \equiv 1 \pmod{\mu}.$$

In quest'ipotesi la risolvente della congruenza proposta ammette tre radici razionali; vediamo quel che accade della proposta.

Osserviamo anzitutto che, ammetta o no delle radici razionali la (A), due al più delle radici  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  della risolvente possono essere non residui quadratici secondo il modulo  $\mu$ . Invero si ha :

$$(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left( \frac{G^2}{4} \right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1.$$

Ma è anche facile riconoscere che se la proposta ammette delle radici razionali, tutte e tre le  $\zeta$  sono residui quadratici. Invero, se si potesse avere ad es.:

$$\zeta_2^{\frac{p-1}{2}} \equiv \zeta_3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1, \quad \zeta_1^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1$$

seguirebbe, supposto  $x$  razionale,

$$x^p \equiv \varepsilon_1 V_{\zeta_1} - \varepsilon_2 V_{\zeta_2} - \varepsilon_3 V_{\zeta_3} \equiv \varepsilon_1 V_{\zeta_1} + \varepsilon_2 V_{\zeta_2} + \varepsilon_3 V_{\zeta_3},$$

dove:

$$\zeta_2 \equiv \zeta_3,$$

cioè che non può essere, perché  $\left(-\frac{\Delta}{27}\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1$ .

Dunque, affinché la congruenza (A) ammetta delle radici razionali, bisogna che siano soddisfatte due delle condizioni:

$$(33) \quad \zeta_1^{\frac{p-1}{2}} \equiv \zeta_2^{\frac{p-1}{2}} \equiv \zeta_3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

la terza essendo conseguenza delle altre due.

Reciprocamente, se le (33) sono verificate, la proposta ammette quattro radici razionali.

Poichè si sanno esprimere le  $\zeta$  in funzione razionale dei dati, possiamo considerare come razionalmente note  $V_{\zeta_1}$ ,  $V_{\zeta_2}$ ,  $V_{\zeta_3}$ , e quindi anche le radici della proposta.

Tenendo conto di questi risultati e del teorema II, si può enunciare quanto segue:

**TEOREMA V.** — *Sia il numero  $\mu = 2^n \mu_1 + 1$  ( $\mu_1$  impari) della forma  $\mu = 6n + 1$ , e siano  $J$  e  $I$  numeri tali che:*

$$\left(-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\mu}.$$

*Sia inoltre a una radice primitiva per numero  $\mu$ .*

*La congruenza (A) ammetterà quattro radici razionali o nessuna.*

secondochè saranno o no soddisfatte le due condizioni:

$$(34) \quad \begin{cases} \zeta_1^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv \left[ -H + \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \right]^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv +1 \pmod{\mu} \\ \zeta_2^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv \left[ -H + \frac{1}{2}(fR_1 + f^2R_2) \right]^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv +1 \pmod{\mu}. \end{cases}$$

Se, le condizioni (34) essendo verificate, si ha:

$$\zeta_1^{\mu_1} \equiv a^{\frac{\mu-1}{2m-1}} \quad \zeta_2^{\mu_1} \equiv a^{\frac{\mu-1}{2m-1}} \pmod{\mu}$$

( $i$  e  $k$  essendo due dei numeri  $1, 2, \dots, 2^{m-1}$ ) una delle radici della proposta sarà data dalla formola:

$$x \equiv \frac{\left[ -H + \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \right]^{\frac{\mu_1+1}{2}}}{a^{\frac{\mu-1}{2m}}} + \frac{\left[ -H + \frac{1}{2}(fR_1 + f^2R_2) \right]^{\frac{\mu_1+1}{2}}}{a^{\frac{\mu-1}{2}}} - \frac{G a^{\frac{\mu-1}{2m}}}{2 \left\{ \left[ -H + \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \right] \left[ -H + \frac{1}{2}(fR_1 + f^2R_2) \right] \right\}^{\frac{\mu_1+1}{2}}}.$$

COROLLARIO. — Se il numero  $\mu = 6n + 1$  è pure della forma  $4m + 3$  e se si pone:

$$\left[ -H + \frac{1}{2}R_1 + \frac{I}{6 \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)} R_1^2 \right]^{m+1} \equiv M + NR_1 + PR_1^2 \pmod{\mu}$$

( $M, N$  e  $P$  essendo i coefficienti di  $R_1^0, R_1^1, R_1^2$  nello sviluppo di  $\left[ -H + \frac{1}{2}R_1 + \frac{I}{6 \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)} R_1^2 \right]^{m+1}$  secondo la formola del

trinomio), una delle radici della proposta sarà data dalla formola:

$$x \equiv 3M \pmod{\mu}.$$

$$14. b) \quad R_1^{\frac{p-1}{3}} \equiv \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)^{\frac{2\pi i}{3}} \equiv f \pmod{\mu}.$$

La risolvente della proposta non ammette in questo caso alcuna radice razionale, mentre, come vedremo, la proposta (A) ammette sempre una radice razionale.

In virtù della b)

$$R_2^{\frac{p-1}{3}} \equiv \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)^{\frac{2\pi i}{3}} \equiv f$$

da cui :

$$(V_{\zeta_1})^p \equiv V_{\zeta_1}, \quad (V_{\zeta_2})^p \equiv V_{\zeta_2}, \quad (V_{\zeta_3})^p \equiv V_{\zeta_3},$$

dunque se  $x$  è razionale,

$$\begin{aligned} x^p &\equiv (\epsilon_1 V_{\zeta_1} + \epsilon_2 V_{\zeta_2} + \epsilon_3 V_{\zeta_3})^p \\ &\equiv \epsilon_1 V_{\zeta_1} + \epsilon_2 V_{\zeta_2} + \epsilon_3 V_{\zeta_3} \equiv \epsilon_1 V_{\zeta_1} + \epsilon_2 V_{\zeta_2} + \epsilon_3 V_{\zeta_3} \end{aligned}$$

cioè :

$$(35) \quad (\epsilon_1 - \epsilon_2)V_{\zeta_1} + (\epsilon_2 - \epsilon_3)V_{\zeta_2} + (\epsilon_3 - \epsilon_1)V_{\zeta_3} \equiv 0.$$

La (35) prova che essendo per ipotesi tutte distinte le  $\zeta$ , se la proposta ammette delle radici razionali, una sola, la  $x_1$ , può essere tale.

D'altra parte, perché  $x_1$  sia razionale, è necessario e sufficiente che si possa porre :

$$\begin{aligned} V_{\zeta_1} &\equiv \sqrt{-H + \frac{I}{2}R_1 f^{t-1} + \frac{I}{6 \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)} R_1^2 f^{2(t-1)}} \\ &\equiv M + Nf^t R_1 + P f^{2t} R_1^2 \end{aligned}$$

( $M, N, P$  essendo numeri razionali), od anche indicando con  $t$  una radice della congruenza irriducibile :

$$t^3 \equiv -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \pmod{\mu}$$

che si abbia :

$$(36) \quad \left[ -H + \frac{1}{2}t + \frac{I}{6\left(-J + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}\right)}t^2 \right]^{\frac{\mu^3-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\mu}.$$

Ora la condizione precedente è sempre verificata; infatti si ha ( $i$  essendo uno qualunque dei numeri 1, 2, 3) :

$$\zeta_i^{(6n+1-i)(6n+1)^2+6n+1+i} \equiv \zeta_i^{3^n(6n+1)^2+6n+1+i} \equiv \zeta_{i+2}^{3^n} \cdot \zeta_{i+1}^{3^n} \cdot \zeta_i^{3^n} \equiv \left(\frac{G^2}{4}\right)^{3^n} \equiv 1 \pmod{\mu}.$$

Dunque la proposta ammette effettivamente una radice razionale.

15. Per ottenere questa radice in funzione razionale dei coefficienti e del modulo, osserviamo che dalle congruenze

$$\zeta_i^{3^n} V_{\bar{\zeta}_i} = V_{\bar{\zeta}_{i+1}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$V_{\bar{\zeta}_1} V_{\bar{\zeta}_2} V_{\bar{\zeta}_3} = -\frac{G}{2}$$

si deduce :

$$V_{\bar{\zeta}_1} = -\frac{G}{2\zeta_2^{3^{n+1}}} = -\frac{2}{G} (\zeta_1 \zeta_2)^{3^{n+1}} \equiv M + NfR_1 + Pf^2R_1^2,$$

$$V_{\bar{\zeta}_2} = -\frac{G}{2\zeta_3^{3^{n+1}}} = -\frac{2}{G} (\zeta_1 \zeta_3)^{3^{n+1}} \equiv M + Nf^2R_1 + PfR_1^2,$$

$$V_{\bar{\zeta}_3} = -\frac{G}{2\zeta_1^{3^{n+1}}} = -\frac{2}{G} (\zeta_2 \zeta_1)^{3^{n+1}} \equiv M + NR_1 + PR_1^2,$$

dove

$$x_1 \equiv 3M.$$

Possiamo quindi concludere il seguente teorema :

TEOREMA VI. — Se  $J$  e  $I$  sono numeri tali che si abbia:

$$\left( -J + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} = f = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} \quad (\text{mod. } \mu = 6n+1)$$

la cong. (A) ammette una ed una sola radice razionale data dalla formula

$$x \equiv 3M,$$

$M$  rappresentando la parte dello sviluppo di  $-\frac{G}{2\zeta_6^{3n+1}}$  secondo le potenze di  $R_1 = \sqrt{-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}}$ , che non contiene  $R_1$  a fattore.

$$16. c) R^{\frac{1}{3}} \equiv \left( -J + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} \equiv -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2} \quad (\text{mod. } \mu).$$

Con un ragionamento perfettamente analogo, si conclude un teorema che non differisce affatto dal precedente.

$$\text{III. } \left( \frac{-\Delta}{27} \right)^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv -1. \quad (E)$$

17. Anche qui conviene distinguere due casi principali; il caso in cui  $\mu = 6n+1$  e quello in cui  $\mu = 6n-1$ .

A)  $\mu = 6n+1$ .

Prima di affrontare lo studio della congruenza generale di 4° grado, mostreremo come debbano essere modificati i teoremi VII e VIII dell'Oltramare circa la congruenza di 3° grado:

$$(37) \quad x^3 + 3px + 2q \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mu = 6n+1),$$

per la quale si ha

$$(q^3 + p^3)^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv -1 \quad (\text{mod. } \mu).$$

Si riconosce dapprima, come all'art. 7, che posto

$$S_1 \equiv \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^3 + p^3}}, \quad S_2 \equiv \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^3 + p^3}}$$

la sola radice

$$x \equiv S_1 + S_2$$

della (37) può essere razionale.

Quindi, che se  $x$  è razionale,  $S_1$  dovrà essere dalla forma

$$(38) \quad S_1 \equiv \alpha + \beta \sqrt[3]{q^3 + p^3}$$

( $\alpha$  e  $\beta$  indicando quantità razionali).

In altri termini si deve avere

$$(39) \quad (-q + t)^{\frac{\mu^2-1}{3}} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

$t$  essendo una radice della congruenza irriducibile

$$t^3 \equiv (q^3 + p^3) \pmod{\mu}$$

condizione che è verificata di per sé, perché si ha :

$$(-q + t)^{(6n+1+1) \cdot 2^m} \equiv (-q - t)^{2^m} (-q + t)^{2^m} \equiv (-p^3)^{2^m} \equiv 1.$$

Dunque la (37) ammette sempre una radice razionale, la quale si trova facilmente essere :

$$(40) \quad x \equiv -\frac{1}{p} [(-q + \sqrt[3]{q^3 + p^3})^{2^m+1} + (-q - \sqrt[3]{q^3 + p^3})^{2^m+1}] \pmod{\mu}.$$

D'altronde con tutta facilità si verifica che questa espressione soddisfa effettivamente alla (37).

Secondo l'enunciato invece del teorema VII dell'Oltremare, la cong. (37) ammetterà o no una radice razionale, secondochè sarà  
*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 1°.—Stampato il 25 giugno 1895. 30

o no soddisfatta la congruenza :

$$(41) \quad (2M - 1)^2(M + 1) \equiv -\frac{2q^2}{p^3} \pmod{\mu},$$

$M$  indicando la parte razionale dell'espressione :

$$(-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{2n}.$$

In base ai nostri risultati la condizione (41) dev'essere verificata identicamente; è ciò che si riconosce facilmente.

I teoremi VII e VIII dell'articolo più volte citato, la cui dimostrazione è abbastanza complicata, devono essere sostituiti dal seguente.

**TEOREMA VII.** — *Se  $\mu$  è un numero primo della forma  $\mu = 6n + 1$ , e se  $p$  e  $q$  sono numeri tali che sia :*

$$(q^2 + p^3)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\mu},$$

*la congruenza :*

$$x^3 + 3px + 2q \equiv 0 \pmod{\mu}$$

*ammetterà sempre una ed una sola radice razionale, data dalla formula :*

$$x \equiv 2M',$$

*dov'è :*

$$M' \equiv -\frac{1}{2p} [(-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{2n+1} + (-q - \sqrt{q^2 + p^3})^{2n+1}].$$

18. Passiamo ora a considerare la congruenza (A).

Siccome i ragionamenti a farsi non differiscono sostanzialmente da quelli più volte adoperati, ci contenteremo d'enunciare all'incirca i risultati.

**TEOREMA VIII.** — *Siano  $J$  e  $I$  numeri tali che sia :*

$$\left(-\frac{\Delta}{27}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv \left[J^3 - \left(\frac{I}{3}\right)^3\right]^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\mu = 6n + 1}$$

e, posto:

$$\begin{aligned} R &\equiv \sqrt[3]{-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} \equiv \frac{3}{I} \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)^{\frac{3n+1}{3}} \\ &\equiv R + S \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \end{aligned}$$

sia

$$\zeta_i = -H + R$$

l'unica radice razionale della congruenza (B).

a) Se  $\zeta_i^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ , la congruenza (A) ammetterà due radici razionali date dalle formole:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 0, \quad x_2 \equiv -\frac{1}{3H} [(-2G + \sqrt{4G^2 + 8H^3})^{\frac{3n+1}{3}} \\ &\quad + (-2G - \sqrt{4G^2 + 8H^3})^{\frac{3n+1}{3}}]. \end{aligned}$$

b) Se  $\zeta_i^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1$ , due radici razionali, date da

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv \frac{GN}{S\sqrt{-3}} + \sqrt{-\frac{S\sqrt{-3}(M+1)}{N}} \\ x_2 &\equiv \frac{GN}{S\sqrt{-3}} - \sqrt{-\frac{S\sqrt{-3}(M+1)}{N}} \end{aligned}$$

dove  $M$  e  $N$  sono rispettivamente i coefficienti di  $\left(\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}\right)^0$  e  $\left(\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}\right)^1$  nello sviluppo secondo la formola del binomio dell'espessione:

$$\zeta_i^m \equiv \left[ \left( -H - \frac{R}{2} \right) + \frac{\sqrt{-3}S}{2} \cdot \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right]^{\frac{3n}{3}}$$

c) Se  $\zeta_i \equiv 0$ , la congruenza (A) ammetterà delle radici razionali nei casi indicati dal teorema I.

19. B)  $\mu = 6n - 1$ .

Svolgeremo anzitutto alcune brevi considerazioni circa la congruenza :

$$(43) \quad x^3 + 3px + 2q \equiv 0 \pmod{\mu = 6n - 1}$$

$p$  e  $q$  essendo tali che :

$$(44) \quad (q^3 + p^3)^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\mu}.$$

Si riconosce dapprima, come lo dimostra l'Oltramare (Teorema IX), che la (43) ammette tre radici razionali o nessuna. Se il primo caso ha luogo, l'espressione :

$$x \equiv \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \equiv S_1 + S_2 \pmod{\mu}$$

deve ridursi a un numero razionale, e per ciò bisogna e basta che sia soddisfatta la congruenza

$$(45) \quad (-q + t)^{\frac{6n-1}{3}} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

essendo  $t$  una radice della congruenza irriducibile

$$t^3 \equiv q^3 + p^3 \pmod{\mu}.$$

Ma si ha :

$$(-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{6n} \equiv (-q + \sqrt{q^2 + p^3})(-q - \sqrt{q^2 + p^3}) \equiv -p^3,$$

donde :

$$(46) \quad (-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{2n} \equiv -f^3 p.$$

Similmente :

$$(-q - \sqrt{q^2 + p^3})^{2n} \equiv -f^3 p.$$

Dunque :

$$(-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{2n(6n-3)} \equiv (-q - \sqrt{q^2 + p^3})^{2n}(-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{2n} \equiv f^3;$$

perciò la condizione (45) equivale alla seguente :

$$i = 0$$

anche a :

$$(-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{2n} \equiv -p.$$

Sicchè la congruenza (47) è condizione non solo necessaria, ma aveva dimostrato l'Oltramare, ma anche sufficiente perchè congruenza (43) ammetta delle radici razionali.

20. Da quanto procede, tenuto conto della teoria delle congruenze irriducibili, si deduce la proposizione seguente :

TEOREMA IX. — Sia  $\mu = 6n - 1 = 6 \cdot 3^m n_1 - 1$  ( $n_1$  primo a 3): sia inoltre  $A \equiv a + b\sqrt{q^2 + p^3}$  (a e b razionali) una radice primitiva della congruenza :

$$x^{\mu^2-1} \equiv 1 \pmod{\mu}.$$

Se la cong. (43) ammette delle radici razionali, si avrà (essendo uno dei numeri 1, 2, ..., 3<sup>m</sup>):

$$(-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{2n_1} \equiv -\sqrt[3^m]{p} A^{\frac{\mu^2-1}{3^m}},$$

$$(-q - \sqrt{q^2 + p^3})^{2n_1} \equiv -\sqrt[3^m]{p} A^{-\frac{\mu^2-1}{3^m}}.$$

Se, inoltre, si pone :

$$(a + b\sqrt{q^2 + p^3})^{\frac{\mu^2-1}{3^{m+1}}} \equiv P + Q\sqrt{q^2 + p^3}.$$

che :

$$(a + b\sqrt{q^2 + p^3})^{-\frac{\mu^2-1}{3^{m+1}}} \equiv P - Q\sqrt{q^2 + p^3};$$

inoltre :

$$(-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{\frac{2n_1+1}{3}} \equiv M + N\sqrt{q^2 + p^3}$$

$$(-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{-\frac{2n_1+1}{3}} \equiv M_1 + N_1\sqrt{q^2 + p^3}$$

una delle radici della congruenza sarà data dalla formola:

$$(48) \quad x \equiv -\frac{2}{\sqrt[3]{p}}(MP - NQ) \pmod{\mu}$$

se:

$$n_1 = 3n_2 + 1;$$

oppure dalla formola:

$$(49) \quad x \equiv -\frac{2}{\sqrt[3]{p}}(M_1P + N_1Q) \pmod{\mu}$$

se:

$$n_1 = 3n_2 + 2.$$

21. Passiamo ora alla congruenza di 4° grado ( $A$ ); e distinguiamo tre casi; secondoché si ha:

$$a) \quad R_i^{p+1} \equiv \left(-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}\right)^{2^k} \equiv \frac{I}{3}$$

$$b) \quad R_i^{p+1} \equiv \left(-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}\right)^{2^k} \equiv f \frac{I}{3}$$

$$c) \quad R_i^{p+1} \equiv \left(-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}\right)^{2^k} \equiv f^a \frac{I}{3}.$$

22. a). In questo caso la risolvente della proposta ammette tre radici razionali; e circa la congruenza ( $A$ ) si conclude il seguente teorema, intieramente analogo al teorema V.

TEOREMA X. — Sia il numero  $\mu = 2^n \mu_1 + 1$  ( $\mu_1$  impari) della forma  $\mu = 6n + 1$ , e siano  $J$  e  $I$  numeri tali che:

$$\left(-\frac{\Delta}{27}\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1, \quad \left(-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}\right)^{2^k} \equiv \frac{I}{3} \pmod{\mu}.$$

Sia inoltre a una radice primitiva per il numero  $\mu$ .

*La congruenza (A) ammetterà quattro radici razionali o non sarà secondochè saranno o no soddisfatte le due condizioni:*

$$(50) \quad \begin{cases} \zeta_1^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv \left[ -H + \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \right]^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv +1 \pmod{\mu} \\ \zeta_2^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv \left[ -H + \frac{1}{2}(fR_1 + f^2R_2) \right]^{\frac{\mu-1}{2}} \equiv +1 \pmod{\mu}. \end{cases}$$

*Se, le condizioni precedenti essendo verificate, si ha:*

$$\zeta_1^{\mu_1} \equiv a^{\frac{\mu-1}{2^{m-1}}} \quad \zeta_2^{\mu_1} \equiv a^{\frac{\mu-1}{2^{m-1}}}$$

*(i e k essendo due dei numeri 1, 2, ..., 2<sup>m-1</sup>) una delle radici della proposta sarà data dalla formola:*

$$x \equiv \frac{\zeta_1^{\frac{\mu_1+1}{2}}}{a^{\frac{\mu-1}{2^m}}} + \frac{\zeta_2^{\frac{\mu_1+1}{2}}}{a^{\frac{\mu-1}{2^m}}} - \frac{G a^{(k+1)\frac{\mu-1}{2^m}}}{(\zeta_1 \zeta_2)^{\frac{\mu_1+1}{2}}} \pmod{\mu}.$$

**COROLLARIO.** — *Se il numero  $\mu = 6n - 1$  è pure della forma  $12m + 11$ , e se si pone:*

$$\begin{aligned} \zeta_1^{3(m+1)} &\equiv \left[ -H + \frac{1}{2}R_1 + \frac{I}{6\left(-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}\right)}R_1^2 \right]^{3(m+1)} \\ &\equiv M + N\bar{R}_1 + P\bar{R}_1^2 \pmod{\mu} \end{aligned}$$

*(M, N, P essendo rispettivamente i coefficienti di  $R_1^0, R_1^1, R_1^2$  nello sviluppo di  $\zeta_1^{3(m+1)}$  secondo la formola del trinomio), una delle radici della proposta sarà data dalla formola:*

$$x \equiv 3M \pmod{\mu}.$$

$$23. b) \quad \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)^{2^m} \equiv f \frac{I}{3}$$

In questo caso si ha:

$$(51) \quad \zeta_1^p \equiv \zeta_1, \quad \zeta_2^p \equiv \zeta_1, \quad \zeta_3^p \equiv \zeta_2 \pmod{\mu}$$

e quindi si riconosce subito che la sola radice  $x$ , della congruenza (A) può essere razionale.

D'altronde una qualunque,  $\zeta_i$ , delle radici della risolvente, è di questa forma:

$$(52) \quad \begin{aligned} \zeta_i &\equiv -H + \frac{I}{2} f^{i-1} R_i + \frac{I}{6 \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)} f^{2(i-1)} R_i^2 \\ &\equiv \varphi + \psi R_i + \tau R_i^2 \pmod{\mu}, \end{aligned}$$

$\varphi, \psi$  e  $\tau$  indicando funzioni razionali intere, a coefficienti razionali, di  $\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}$ . Inoltre  $J$  e  $I$  sono tali (cong. b) che non si possono determinare, come nel caso precedente (a), due numeri razionali  $\alpha$  e  $\beta$ , soddisfacenti alla relazione:

$$R_i \equiv \sqrt[3]{-J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} \equiv \alpha + \beta \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}.$$

Perchè dunque la proposta ammetta una radice razionale, è necessario e sufficiente che si possa porre:

$$(53) \quad \sqrt{\zeta_i} \equiv \sqrt{\varphi + \psi R_i + \tau R_i^2} \equiv M + N f^i R_i + P f^{2i} R_i^2 \pmod{\mu},$$

$M, N, P$  essendo, come  $\varphi, \psi$  e  $\tau$ , funzioni razionali intere, a coefficienti razionali, di  $\sqrt{-\frac{\Delta}{27}}$ .

Nella teoria delle congruenze binomie della forma:

$$(54) \quad X^m \equiv A(x) \quad [\text{modd. } F(x), \mu]$$

[ $F(x)$  essendo una funzione intera di grado  $v$ , irriducibile secondo il modulo primo  $\mu$ , e  $m$  un divisore di  $\mu^v - 1$ ] si dimostra che la condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità della (54) è

espressa dalla congruenza :

$$A^{\frac{\mu^{v-1}}{m}} \equiv 1 \pmod{F(x), \mu}.$$

Similmente, la congruenza a triplice modulo :

$$(55) \quad Y(x, X)^m \equiv A(x, X) \pmod{G(x, X), F(x), \mu}$$

[ $F(x)$  essendo sempre una funzione di grado  $v$ , irriducibile secondo  $\mu$ ;  $G(x, X)$  una funzione intera di grado  $\lambda$  in  $X$ , i cui coefficienti sono polinomii in  $x$ , di grado inferiore a  $v$ , il primo di essi essendo uguale all'unità; e tale che non si possa porre :

$$G(x, X) \equiv G_1(x, X)f(x, X) \pmod{F(x), \mu}$$

il grado di  $G_1(x, X)$  in  $X$  essendo inferiore a  $\lambda$ ; e infine  $m$  essendo un divisore di  $\mu^{\lambda v} - 1$ , è possibile o no secondechè sia o no verificata la condizione :

$$(56) \quad A(x, X)^{\frac{\mu^{\lambda v}-1}{m}} \equiv 1 \pmod{G(x, X), F(x), \mu}.$$

In particolare, prendendo :

$$F(x) = x^3 + \frac{\Delta}{27}, \quad G(x, X) = X^3 - (-J + x),$$

$$A(x, X) = \tau(x)X^2 + \psi(x)X + \varphi(x)$$

$$\mu = 6n - 1,$$

con che :

$$v = 2, \lambda = 3, m = 2,$$

si vede che la congruenza :

$$Y^2 \equiv \tau(x)X^2 + \psi(x)X + \varphi(x) \quad \left[ \text{modd. } X^3 - (J+x), x^2 + \frac{\Delta}{27}, \mu \right]$$

è possibile ed allora soltanto, che si abbia:

$$(57) \left[ -x^2 X^2 + x^2 X + x^2 \right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad \left[ \text{mod. } X^2 - (-J+x), x^2 + \frac{\Delta}{27}, \mu \right].$$

Conveniamo ora che la indeterminata  $x$  sia una radice della congruenza irriducibile:

$$x^2 + \frac{\Delta}{27} \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mu),$$

che, inoltre,  $X$  sia una radice della congruenza irriducibile a doppio modo:

$$X^2 - (-J+x) \equiv 0 \quad \left[ \text{mod. } \left( x^2 + \frac{\Delta}{27} \right), \mu \right].$$

Allora si vede che la (53) sarà possibile ed allora soltanto che si abbia:

$$(58) \quad \left[ -H + \frac{1}{2} R_i + \frac{I}{6 \sqrt{-\frac{\Delta}{27}}} R_i^2 \right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad (\text{mod. } \mu).$$

Questa relazione è verificata identicamente in forza delle (51): dunque la proposta ammette sempre una radice razionale.

È facile quindi concludere la seguente proposizione:

**Teorema XI.** — Se  $J$  e  $I$  sono numeri tali che si abbia:

$$\left[ J - \left( \frac{I}{3} \right)^2 \right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left( -\frac{\Delta}{27} \right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad (\text{mod. } \mu = 6n-1)$$

$$R_i^{p+1} \equiv \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)^2 \equiv f \frac{I}{3},$$

la congruenza (A) ammetterà una sola radice razionale data dalla formula:

$$x \equiv 3M,$$

*M rappresentando la parte dello sviluppo di*

$$\begin{aligned} -\frac{G}{2\zeta_i^3} &\equiv \frac{2(\zeta_1\zeta_3)^{3*}}{G} \equiv \frac{2}{G} \left[ -H + \frac{1}{2} f R_i + \frac{I}{6 \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)} f^2 R_i^2 \right]^{3*} \\ &\times \left[ -H + \frac{1}{2} f^2 R_i + \frac{I}{6 \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)} f^2 R_i^2 \right]^{3*} \end{aligned}$$

*secondo le potenze di  $R_i$ , che non contiene  $R_i$  a fattore.*

$$24. c) \quad \left( -J + \sqrt{-\frac{\Delta}{27}} \right)^{3*} \equiv f^2 \frac{I}{3}.$$

I ragionamenti e le conclusioni in questo 3° caso, non differiscono affatto da quelle del caso precedente.

Genova, maggio 1895.

GEROLAMO CORDONE.

## SUR LA THÉORIE DES GROUPES

ET DES

SURFACES ALGÉBRIQUES;

par M. Émile Picard, à Paris.

Adunanza del 23 giugno 1895.

Dans mes recherches sur les fonctions algébriques de deux variables indépendantes (Journal de Mathématiques, 1889), je me suis occupé des surfaces admettant un groupe fini et continu de transformations birationnelles. Cette question se rattache à l'étude des groupes algébriques en même temps qu'à la théorie des équations différentielles; c'est ce que j'ai montré succinctement (Comptes Rendus, 28 avril 1890) dans une Note où j'ai étudié certaines équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, et j'ai indiqué plus récemment (Comptes Rendus, 25 mars 1895) comment les considérations que j'avais précédemment développées conduisaient immédiatement à une proposition générale sur les groupes algébriques. Il m'a semblé qu'il y avait quelque intérêt à rassembler ces résultats un peu épars; c'est que je me propose de faire ici.

## I.

1. Rappelons d'abord une proposition bien connue dans la théorie des groupes continus. Soit un groupe relatif à  $n$  lettres  $x_1, x_2, \dots, x_n$

pendant de  $r$  paramètres

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

On suppose que toutes les substitutions du groupe sont deux à échangeables; dans ces conditions on peut choisir les paramètres telle sorte que les équations donnant les  $x'$  en fonctions des ent de la forme

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \xi_{ik}(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, n \\ k=1, 2, \dots, r \end{pmatrix},$$

dépendant seulement des  $x$ .

.. Ceci posé, nous allons établir un théorème général sur les ions de la forme

$$f(y, y', \dots, y^{(m)}) = 0,$$

signant par  $y, y', \dots, y^{(m)}$  une fonction de  $x$  et ses dérivées à l'ordre  $m$ ; l'équation différentielle ne renferme pas explicit la variable  $x$ . Considérons une intégrale  $y$  de cette équation, soit uniforme dans une certaine région du plan  $R$ , et soit  $R'$  égion du plan intérieure à  $R$ . Le point  $x$  étant dans  $R'$ , le point  $b$  sera dans  $R$ , si la constante  $b$  est suffisamment petite; soient

$$Y, Y', \dots, Y^{(m)}$$

deurs de  $y, y', \dots, y^{(m)}$  quand on y remplace  $x$  par  $x + b$ .

clair que les  $Y$  sont fonctions des  $y$  et de  $b$ , sans que  $x$  entre itement dans ces expressions. Posons donc

$$Y = F(b, y, y', \dots, y^{(m)}),$$

$$Y' = F_1(b, y, y', \dots, y^{(m)}),$$

.....

$$Y^{(m)} = F_m(b, y, y', \dots, y^{(m)});$$

les  $Y$  sont des fonctions bien déterminées de  $y$  et inversement. Nous allons étudier le cas où cette transformation biuniforme entre

$$y, y', \dots y^{(m)} \text{ et } Y, Y', \dots Y^{(m)}$$

serait birationnelle.

Dans les fractions rationnelles  $F$ , mettons comme coefficients de  $y, y', \dots y^{(m)}$  des constantes indéterminées, et écrivons que  $Y$  est une solution de l'équation (1). Nous obtiendrons ainsi un certain nombre de relations algébriques entre ces constantes; celles-ci s'exprimeront alors rationnellement en fonction d'un certain nombre  $n$  de paramètres liés par une relation algébrique. Désignons ces paramètres par  $x_1, x_2, \dots x_n$  et par

$$(2) \quad S(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

la relation algébrique à laquelle ils satisfont. Quand dans une solution de l'équation (1), correspondant à des valeurs arbitraires des paramètres  $x_1, x_2, \dots x_n$ , on change  $x$  en  $x + h$ , les paramètres  $x_1, x_2, \dots x_n$  se changent en  $X_1, X_2, \dots X_n$ , ceux-ci étant des fonctions rationnelles de ceux-là. Ceci revient à dire que la surface algébrique  $S$  représentée par l'équation (2) admet un groupe de transformations birationnelles en elle-même dépendant d'un paramètre arbitraire  $h$ , et pour  $h = 0$ , cette transformation devient la transformation identique. Ce groupe sera déterminé par des équations de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_{oi}(x_1, x_2, \dots x_n),$$

les  $\xi$  étant des fonctions rationnelles des  $x$ .

3. Je représente par

$$(3) \quad \begin{aligned} X_1 &= f_1(b, x_1, x_2, \dots x_n), \\ X_2 &= f_2(b, x_1, x_2, \dots x_n), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ X_n &= f_n(b, x_1, x_2, \dots x_n) \end{aligned}$$

(les  $f$  étant rationnelles en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) la substitution birationnelle transformant  $S$  en elle-même. Dans les fractions rationnelles  $f$ , mettons encore comme plus haut des lettres indéterminées comme coefficients des  $x$ . Nous considérons le groupe de transformations contenu dans la substitution précédente, *dépendant du plus grand nombre possible de paramètres et tel que toutes ses transformations soient deux à deux échangeables*. Ce groupe, que nous désignons par  $G$ , dépend au moins d'un paramètre, puisqu'il contiendra manifestement la substitution (3); de plus, si  $r$  désigne le nombre des paramètres, les coefficients des  $x$  dans la transformation pourront être regardés comme des fonctions *rationnelles* de  $r + 1$  paramètres liés par une relation *algébrique*. Ceci résulte de ce que les relations à écrire entre les lettres indéterminées, figurant comme coefficients, sont toutes algébriques, puisque nous envisageons le groupe contenant le plus grand nombre possible d'arbitraires.

On peut d'autre part, d'après le n° 1, choisir les paramètres que nous désignerons par

$$b, b_1, \dots, b_{r-1}$$

de manière que le groupe  $G$  soit défini par les équations :

$$\frac{\partial X_i}{\partial b} = \xi_0(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\frac{\partial X}{\partial b_k} = \xi_k(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (k = 1, 2, \dots, r-1);$$

le premier de ces paramètres, désigné par  $b$ , ne sera autre que le paramètre  $b$  qui figurait dans (3), et les  $\xi_0$  sont les fonctions rationnelles écrites à la fin du n° 2; tous les  $\xi$  sont d'ailleurs des fonctions rationnelles des  $X$ , qui, bien entendu, satisfont à la relation

$$S(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0.$$

Deux circonstances peuvent se présenter relativement au groupe  $G$ . Il peut être possible de faire correspondre au moyen d'une sub-

stitution du groupe un point arbitraire de la surface  $S$  à un autre point de cette surface, c'est-à-dire que le groupe peut être  $n - 1$  fois transitif; ou bien au contraire la transitivité de  $G$  sera d'ordre inférieur à  $n - 1$ . Mais il est aisément de voir que ce second cas se ramène au premier, car on pourra alors détacher dans  $S$  une multiplicité *algébrique* d'un moindre nombre de dimensions, que laisseront invariable les substitutions de  $G$ , et tel qu'un point quelconque de cette multiplicité pourra correspondre à un autre par une substitution de ce groupe.

Supposons donc  $G$  transitif de la manière indiquée; le nombre  $r$  sera alors au moins égal à  $n - 1$ , et si, portant son attention sur les variables  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$  (la dernière  $X_n$  étant fonction des autres) on considère le tableau rectangulaire

$$\begin{array}{cccccc} \xi_{0,1} & \xi_{0,2} & \dots & \xi_{0,n-1} \\ \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \dots & \xi_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r-1,1} & \xi_{r-1,2} & \dots & \xi_{r-1,n-1} \end{array} \quad r \geq n - 1$$

tous les déterminants formés avec les  $n - 1$  colonnes verticales et  $n - 1$  des lignes horizontales ne seront pas identiquement nuls, et il y aura alors nécessairement au moins un de ces déterminants, où figure la première ligne, qui ne sera pas identiquement nul. Nous pouvons donc supposer que le déterminant formé par les  $n - 1$  colonnes et les  $n - 1$  premières lignes n'est pas identiquement nul. On a ainsi les équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned} dX_1 &= \xi_{0,1} db + \xi_{1,1} db_1 + \dots + \xi_{n-2,1} db_{n-2} \\ dX_2 &= \xi_{0,2} db + \xi_{1,2} db_1 + \dots + \xi_{n-2,2} db_{n-2} \\ &\dots \\ dX_{n-1} &= \xi_{0,n-1} db + \xi_{1,n-1} db_1 + \dots + \xi_{n-2,n-1} db_{n-2} \end{aligned}$$

qui définissent

$$X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$$

## **en fonction de**

$$b, b_1, \dots, b_m.$$

En résolvant les équations précédentes par rapport à  $dh_1, dh_2, \dots, dh_{n-1}$ , on aura

où les  $P$  sont des fonctions rationnelles de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , la dernière de ces lettres étant liée aux autres par la relation  $S=0$ . Les conditions d'intégrabilité sont évidemment vérifiées, et nous avons donc à faire l'inversion d'un système d'intégrales de différentielles totales relatives à la surface  $S=0$ .

Or les  $X$  sont des fonctions *uniformes* de  $b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$ , ayant pour toutes les valeurs finies de ces variables le caractère de fonctions rationnelles. Montrons-le, par exemple, pour la variable  $b$ ; il suffit de répéter un mode de raisonnement classique dans la théorie des fonctions abéliennes : les relations (3) permettent d'étendre de proche en proche les fonctions d'une manière uniforme.

Nous pouvons donc conclure que les  $X$  sont des fonctions abéliennes (ou dégénérescences) des  $b$ , et en particulier de la variable  $b$  qui nous intéresse particulièrement; nous entendons par fonction abélienne d'une variable, ce que devient une fonction abélienne d'un certain nombre d'arguments, quand on laisse constants tous les arguments moins un seul qui devient la variable.

Si maintenant nous revenons à l'équation (1), on voit que les coefficients de  $y$ ,  $y'$ , ...  $y^{(m)}$  dans les relations

$$\begin{aligned} Y &= F(b, y, y', \dots, y^{(m)}), \\ Y' &= F_i(b, y, y', \dots, y^{(m)}), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Y^{(m)} &= F_m(b, y, y', \dots, y^{(m)}) \end{aligned}$$

seront des fonctions abéliennes (ou dégénérescences) de  $b$ . Si nous considérons, non pas  $x$ , mais  $b$  comme la variable, nous pouvons dire que  $Y$  est une fonction abélienne de  $b$ , et par suite  $y$  est une fonction abélienne de  $x$ .

Nous énoncerons donc le théorème suivant qui résume cette analyse :

*Sous les hypothèses faites, l'intégrale générale de l'équation (1) s'exprime à l'aide des transcendantes de la théorie des fonctions abéliennes.*

Au lieu de l'équation différentielle (1), on pourrait évidemment considérer le système d'équations différentielles du premier ordre :

$$(Σ) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

avec la relation algébrique  $S(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Si on a

$$x_i(t+b) = f_i(b, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

les  $f_i$  étant rationnelles en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , les intégrales du système (Σ) s'expriment à l'aide des transcendantes de la théorie des fonctions abéliennes.

4. J'indiquerai une conséquence de cette proposition. Soit une équation

$$f(y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$$

dont on sait que l'intégrale générale s'exprime à l'aide d'une intégrale particulière quelconque par la formule

$$Y = R(y, y', \dots, y^{(m)}, a_1, a_2, \dots, a_m),$$

$R$  dépendant rationnellement des  $y$  et les  $m$  lettres  $a$  représentant des constantes arbitraires.

Il est d'abord immédiat que l'intégrale générale de l'équation sera uniforme, puisque, dans le voisinage de tout point,  $Y$  peut s'exprimer rationnellement à l'aide d'une intégrale particulière  $y$  que

l'on peut supposer uniforme autour de ce point. Ensuite, les conditions supposées dans le théorème précédent seront certainement vérifiées, car on peut prendre pour  $Y$ , ce que devient  $y$  quand on remplace  $x$  par  $x + b$ ; il en résulte que *l'intégrale générale de l'équation ci-dessus pourra s'exprimer à l'aide des fonctions abéliennes ou de leurs dégénérescences.*

## II.

5. Le théorème du n° 3 était relatif aux équations différentielles. En changeant, pour ainsi dire, seulement la forme de cette proposition, on obtient une propriété générale des groupes algébriques. Prenons une *surface algébrique* dans un espace à  $n$  dimensions

$$S(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

et supposons que cette surface admette un groupe  $G$  continu et fini de transformations birationnelles. J'envisage un des sous-groupes finis à *un* paramètre contenu dans  $G$ ; ce sous-groupe sera défini par un système d'équations de la forme

$$(S) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots x_n) \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

les  $X$  étant rationnels en  $x_1, x_2, \dots x_n$ . Puisque ce sous-groupe fait partie du groupe  $G$ , le système (S) jouit de la propriété indiquée pour le système ( $\Sigma$ ) à la fin du n° 3, et nous pouvons dire par suite que, *dans les équations finies du sous-groupe précédent, les coefficients sont des fonctions uniformes du paramètre arbitraire s'exprimant à l'aide des transcendantes de la théorie des fonctions abéliennes.*

Nous pouvons opérer ainsi pour chacun des sous-groupes à un paramètre contenu dans  $G$ , et on arrive alors au théorème général suivant :

*Si le groupe  $G$  est à  $r$  paramètres, on peut s'arranger de manière que les coefficients des fonctions rationnelles de  $x$ , qui donnent le groupe, soient des fonctions uniformes des  $r$  paramètres s'exprimant au moyen*

*des transcendantes de la théorie des fonctions abéliennes ou de leurs dégénérescences.*

6. Nous pouvons faire, relativement au groupe  $G$ , une distinction importante, sur laquelle nous avons déjà eu à insister au n° 3. Le groupe  $G$  peut ou non permettre de faire correspondre à un point arbitraire de la surface  $S$  un autre point quelconque de cette même surface.

Dans le premier cas, le groupe est au moins  $n - 1$  fois transitif, et en faisant varier  $n - 1$  des paramètres on obtiendra une représentation paramétrique de la surface. Il en résulte que *les coordonnées d'un point quelconque de la surface*

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

*s'exprimeront par des fonctions abéliennes de  $n - 1$  paramètres.*

Dans le second cas, le groupe  $G$  sera nécessairement un sous-groupe d'un groupe  $\Gamma$  de transformations birationnelles de la surface, pour lequel les paramètres pourront être regardés comme entrant *algébriquement*. Si ce groupe  $\Gamma$  (qui peut coïncider avec  $G$ ) est au moins  $n - 1$  fois transitif, nous sommes ramenés au cas précédent. Dans le cas contraire, par chaque point de la surface passe une multiplicité algébrique, contenue dans  $S$ , et d'ordre inférieur à  $n - 1$ . Cette multiplicité jouira de la propriété qu'avait  $S$  dans le premier cas, c'est-à-dire que, si elle est à  $r$  dimensions, *les coordonnées de ses points s'expriment par des fonctions abéliennes de  $r$  paramètres*. Il est important de remarquer que les MODULES de ces fonctions abéliennes ne dépendent pas du point de la surface qui détermine la multiplicité; ceci résulte de ce que les expressions des coordonnées peuvent être obtenues en faisant varier seulement, parmi les paramètres de  $\Gamma$ ,  $r$  d'entre eux qu'on peut supposer être des arguments de fonctions abéliennes formées comme il a été dit au n° 5, et par conséquent tout-à-fait indépendantes du point de la surface déterminant la multiplicité qui nous occupe.

7. Le théorème du n° 5 s'applique en particulier aux groupes

de substitutions de CANTOR SC, et désignant w lettres indépendantes par  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , on a alors les équations à la substitution birationnelle

$$X_1 = R_1(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r)$$

$$X_2 = R_2(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r)$$

-----

$$X_n = R_n(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r)$$

formant un groupe à r paramètres, il résulte immédiatement, de ce qui précède, que l'on peut toujours s'arranger de façon que les  $R$  soient des fonctions uniformes des  $a$  s'exprimant par les transcendantes abéliennes.

On pourra dans certains cas aller plus loin. Si le groupe est n fois transitif, et si ses substitutions sont échangeables deux à deux, les transcendantes qui s'introduisent dans les calculs résultent simplement de l'inversion d'intégrales de différentielles totales rationnelles. Par conséquent, b désignant un des paramètres, on obtiendra seulement, par l'inversion, des fonctions rationnelles de b ou de  $e^b$ , en désignant par k une constante. On pourra alors s'arranger de manière que les  $R$  contiennent rationnellement les paramètres a.

### 8. Appliquons les généralités qui précédent à la surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

dans l'espace à trois dimensions. Nous allons retrouver et compléter les propositions que nous avons données autrefois.

Supposons que cette surface admette un groupe de transformations birationnelles. Tout d'abord si le groupe permet de passer d'un point quelconque de la surface à un autre point quelconque de celle-ci, on est assuré que les coordonnées d'un point de la surface s'expriment par des fonctions abéliennes (ou dégénérescentes) de deux paramètres

Il faut approfondir davantage la question. Considérons un cas

groupe à un paramètre contenu dans le groupe donné, nous raisonnerons comme nous l'avons fait plus haut d'une manière générale et nous sommes conduits à une transformation de la surface en elle-même, dépendant rationnellement des lettres  $X_1, X_2, \dots X_r$ , qui sont elles-mêmes fonctions de paramètres  $b, b_1, \dots b_{r-1}$  (par les n° 2 et 3). Nous avons ainsi la transformation birationnelle de  $\mathcal{S}$  en elle-même

$$\begin{aligned} X &= f(b, b_1, \dots b_{r-1}, x, y, z), \\ Y &= \varphi(b, b_1, \dots b_{r-1}, x, y, z), \\ Z &= \psi(b, b_1, \dots b_{r-1}, x, y, z), \end{aligned}$$

les substitutions de ce groupe étant deux à deux échangeables. Si ce groupe est deux fois transitif, on pourra résoudre par rapport à deux des paramètres, et, d'après ce que nous avons vu au n° 3, les coordonnées d'un point quelconque de la surface s'exprimeront par des fonctions abéliennes de deux paramètres *au moyen de l'inversion de deux intégrales de différentielles totales*; c'est le résultat que j'ai obtenu antérieurement (*Journal de Mathématiques*, 1889, page 222).

Si le groupe  $\Gamma$  ne permet pas de passer d'un point quelconque de la surface à un autre point, on pourra faire passer par chaque point de la surface une courbe algébrique que le groupe transformera en elle-même. Cette courbe sera par suite nécessairement du genre *zéro* ou du genre *un*. On peut laisser constants tous les paramètres sauf un seul, et considérer par exemple  $b$  comme seul variable.

Dans le cas où la courbe sera de genre *un*,  $X, Y, Z$  devront être des fonctions doublement périodiques de  $b$ , et il est clair que le modèle de cette courbe est fixe, c'est-à-dire indépendant de  $(x, y, z)$ . *Nous avons donc, dans ce second cas, un faisceau de courbes de genre zéro ou un sur la surface*; il passe par chaque point de la surface une courbe de ce faisceau. C'est un théorème que j'ai également indiqué précédemment (*loc. cit.*) et j'ai montré qu'on pouvait même aller plus loin quand le genre géométrique de la surface dépasse l'unité.

Le seul cas dont l'étude, d'après ce qui précède, n'est pas entièrement complète est celui où la surface admet un groupe de transformations qui ne permet pas de passer d'un point quelconque de la surface à un autre point de celle-ci, et où en même temps la surface a son genre géométrique au plus égal à *un*. Quand ces deux conditions se trouvent remplies, j'énonce seulement que l'on peut trouver sur la surface un faisceau de courbes de genre zéro ou un, mais j'ai tout lieu de penser que les travaux récents de M. Castelnuovo et de M. Enriques sur la théorie des surfaces permettront de donner des indications plus précises sur la nature de la surface.

Paris, le 5 juin 1895.

ÉM. PICARD.

二六

卷之三

卷之三

- 2027 - Book 2 - 1

2.  $\pi_1(\partial M) \cong \langle a, b | ab = b^2 \rangle$   
3.  $\pi_1(M) \cong \langle a, b | ab = b^2, a^2 = 1 \rangle$   
4.  $\pi_1(M) \cong \langle a, b | ab = b^2, a^2 = b^2 \rangle$   
5.  $\pi_1(M) \cong \langle a, b | ab = b^2, a^2 = b^2, a^3 = 1 \rangle$

INTERVIEW WITH  
THE BISHOP OF THE NAME S  
RECORDED ON 3 JULY 3

With some P. members it  
is a great effort to come running  
through the mud. The dividends  
will be enormous.

the first part of the day  
was very bright and clear, but  
as the sun went down it grew  
darker and darker, and finally a  
few small clouds appeared.  
The sky was now dark blue,  
and the stars were visible.  
The clouds moved slowly across  
the sky, obscuring the stars at  
times. It was a peaceful and  
beautiful night.

the lines of the plate is  
the density of

The line of hills about a mile or more distant is a dark line of trees and the ranges on either side are covered with them.

tive ( $\overline{\wedge}$ ). But the pencils with centers  $A$  and  $B$  are  $\overline{\wedge}$ , since the intersection  $F$  of corresponding rays lies on the base conic.

Similarly, the pencils with centers  $D$  and  $C$  projecting  $G$  are  $\overline{\wedge}$ . Hence the pencils  $B$  and  $C$  are  $\overline{\wedge}$  and the intersection  $R$  of corresponding rays generates a conic passing through  $B$  and  $C$ .

Every line through  $O$  transforms into itself, i. e. every range containing the point  $O$  transforms into a range with the same bearer (Pascal line).

Every point on the base conic is self-corresponding.

The point  $A$  transforms into the line  $AC$ ;  $D$  into  $DB$ ;  $O$  into  $BC$ . All other points on the line  $AD$  transform into the point  $O$ ; all others on  $AC$  into  $C$ ; all others on  $DB$  into  $B$ .

Thus the vertices and sides of  $\Delta ADO$  transform into the sides and vertices respectively of  $\Delta OBC$ .

If  $K$  be the intersection of  $AD$  with  $BC$ , the corresponding points on  $OK$  lie in involution.

For we have two  $\overline{\wedge}$  point-rows superposed on  $OK$ , in which  $O$  and  $K$  are mutually corresponding points.

ranges on  $a$  and  $b$  are  $\overline{\wedge}$ , since the join  $f$  of corresponding points is tangent to the base conic.

Similarly, the ranges on  $d$  and  $c$  cut out by  $g$  are  $\overline{\wedge}$ . Hence the ranges  $b$  and  $c$  are  $\overline{\wedge}$  and the join  $r$  of corresponding points generates a conic tangent to  $b$  and  $c$ .

Every point in  $o$  transforms into itself, i. e. every flat-pencil containing the line  $o$  transforms into a pencil with the same bearer (Brianchon point).

Every line tangent to the base conic is self-corresponding.

The line  $a$  transforms into the point  $ac$ ;  $d$  into  $db$ ;  $o$  into  $bc$ . All other lines through the point  $ad$  transform into the line  $o$ ; all others through  $ac$  into  $c$ ; all others through  $db$  into  $b$ .

Thus the sides and vertices of  $\Delta ado$  transform into the vertices and sides respectively of  $\Delta abc$ .

If  $k$  be the join of  $ad$  and  $bc$ , the corresponding lines through  $ok$  lie in involution.

For we have two  $\overline{\wedge}$  flat-pencils superposed on  $ok$ , in which  $o$  and  $k$  are mutually corresponding lines.

With respect to the fixed pair of opposite sides  $AC$  and  $BD$  as axes, the most general equation to a conic making the intercepts  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OC = c$ ,  $OD = d$ , may be thrown into the form :

$$bdx^2 + bbdxy + acy^2 + bd(a - c)x + ac(d - b)y - abcd = 0,$$

where  $b$  is arbitrary. We then find the following relations between the coordinates  $x, y$  of  $P$  and  $x_i, y_i$  of  $R$ :

$$x_i = \frac{U}{W}, \quad y_i = \frac{V}{W},$$

where:

$$U = bcx(dx + ay + ad)$$

$$V = bcy(dx + ay + ad)$$

$$W = bdx^2 + acy^2 + bbdxy + abdx + acdy.$$

To express the transformation in homogeneous coordinates, we note that :

$$bU + cV - bcW = bc(ab + cd - bd)xy.$$

We exclude the very trivial case  $b = \frac{ab + cd}{bd}$ , when the base conic breaks up into the right lines  $AD$  and  $BC$ ; for every point of the plane then transforms into  $BC$ .

Not at all trivial is the case when it breaks up into  $AB$  and  $DC$ .

Let

$$\zeta_i = \frac{bx_i + cy_i - bc}{ab + cd - bd} \text{ and } \zeta = dx + ay + ad.$$

$$\therefore x_i : y_i : \zeta_i = x\zeta : y\zeta : xy.$$

Solving,

$$x : y : \zeta = x_i \zeta_i : y_i \zeta_i : x_i y_i.$$

The triangles of reference for the old and new coordinates are

then, respectively  $OAD$ ,  $OCB$ , viz :

$$OD \equiv x = 0, \quad OA \equiv y = 0, \quad AD \equiv z = 0,$$

$$OB \equiv x_i = 0, \quad OC \equiv y_i = 0, \quad BC \equiv z_i = 0.$$

The solution of the Cartesian relations gives :

$$x = \frac{U}{W}, \quad y = \frac{V}{W},$$

where

$$U' = adx_i(-bx_i - cy_i + bc)$$

$$V' = ady_i(-bx_i - cy_i + bc)$$

$$W' = bdx_i^2 + acy_i^2 + bd^2bx_iy_i - abc^2y_i - bcdx_i.$$

The conic  $W' = 0$  into which the line at infinity transforms, and the conic  $W = 0$  which transforms into the line at infinity are both *similar* to the base conic.

The fact that the three conics are simultaneously all ellipses, all parabolas, or all hyperbolas follows also projectively; since a line and its transform meet the base conic in the same two points (real and distinct, coincident, or imaginary).

University of Chicago, May 1, 1895.

LEONARD E. DICKSON.

## EMILIO WEYR.

Necrologia di Gustavo Kohn, in Vienna.

---

Dai *Monatshefte für Mathematik und Physik*, VL Jahrgang 1895, pp. 1-4.  
Traduzione di F. Gerbaldi.

---

Emilio Weyr nacque in Praga nell'anno 1848 da Francesco Weyr, professore di matematica nella *Staats-Oberrealschule* di quella città. Nella famiglia Weyr le scienze matematiche avevano residenza. Destinato fin dall'adolescenza alla matematica, Emilio trovò in suo padre un vero maestro, ed uno zelante condiscipolo nel suo fratello minore Edoardo, che oggi è professore di matematica in Praga nella *böhmischa technische Hochschule*.

Quando entrò al Politecnico di Praga, Weyr possedeva già un buon corredo di cognizioni; allora Guglielmo Fiedler introduceva i suoi allievi alla nuova geometria, e si studiava di interessare i circoli scientifici di Praga a questa disciplina.

Emilio Weyr si sentì potentemente attratto dal suo fascino, e ben presto fu stimolato a ricerche scientifiche. Primo a far rivolgere l'attenzione sul matematico giovanetto fu uno scritto pubblicato a Lipsia da Teubner, la prima parte del quale (1869) ha per oggetto una teoria costruttiva delle curve razionali del 3º ordine, e la seconda parte (1870) una teoria delle superficie rigate del 3º ordine, entrambe basate sopra una corrispondenza (12).

La sua predilezione per la geometria sintetica divenne anche più profonda dopo un suo viaggio scientifico in Italia. Attrattato qui dai lavori e dalla fama del Cremona, fu interamente conquistato dalla personale influenza di questo scienziato. Per tutta la sua vita scientifica Emilio Weyr rimase fedele alla geometria sintetica, e, in questa, all'indirizzo di Charles-Cremona, che non disdegna risalire a teoremi generali, fondati soltanto analiticamente, per dedurne conseguenze geometriche. L'indirizzo puramente geometrico di Staudt-Reye ebbe su di lui poca influenza. Nel primo indirizzo poi egli cercò una strada sua propria.

E invero ben si può parlare d'un metodo a lui proprio, che spicca in molti dei suoi più notevoli lavori, e che si può caratterizzare nella maniera seguente. Da una nota proprietà di una certa forma geometrica si ricava un'altra proprietà (a quella equivalente) di una certa corrispondenza algebrica. Per ciò quella proprietà appare in certa guisa concepita più astrattamente e liberata dalla forma particolare. Allora essa si traduce in proprietà delle più svariate forme, sulle quali si possa con certe costruzioni geometriche far risorgere la corrispondenza della sorta considerata.

Il metodo lascia, come si vede, un vasto campo d'azione all'abilità ed alla imaginativa del geometra, ed il Weyr se ne serve con vera maestria.

Così è chiaro come per opera di lui la teoria delle corrispondenze algebriche su sostegni razionali, e con essa la teoria delle forme razionali e particolarmente delle curve razionali sia progredita.

La teoria delle corrispondenze algebriche, siano quelle generali, siano alcune speciali tra esse, deve a lui una serie di semplici teoremi, ed ha origine da lui una parte della terminologia oggigiorno abituale in questo campo. In particolare egli ha fermato la sua attenzione sulla teoria di una classe più specialmente importante di corrispondenze, cioè sulla teoria delle involuzioni. E quando egli, studiate le involuzioni di prima specie, tra cui approfondì particolarmente quelle cubiche, spinto dalla rappresentazione delle curve razionali tra loro, passò a studiare anche le involuzioni di specie superiore, ha reso alla scienza un servizio duraturo.

Quando si vuol trattare geometricamente una corrispondenza, ordinariamente si assume come sostegno di essa una conica, e si studia la sua curva direttrice, cioè l'inviluppo delle congiungenti punti corrispondenti. Note proprietà di corrispondenze si usufruiscono col l'assumere, accanto alle coniche, come sostegni curve razionali del 3º e 4º ordine (sia piane che gobbe). Sebbene in questa maniera si ottengono talora anche proprietà di forme non razionali, tuttavia si ha in questo oltanto un metodo per lo studio delle forme razionali, e appunto queste fino ll'anno 1883 interessano soprattutto il Weyr. Egli poi nello studio di alcune speciali curve razionali ha in più lavori, per la trattazione analitica, adottata la notazione parametrale e l'ha applicata con successo.

Dal 1883 all'incirca i suoi lavori acquistano un altro indirizzo. In luogo delle curve di genere zero formano d'ora in poi oggetto delle sue ricerche le curve di genere uno. Agli studi fondamentali generali, per i quali Clebsch, Brill

Nöther erano penetrati con sì splendido successo nella geometria sopra una curva algebrica, fu restio a fare adesione. Egli aveva su ciò la sua particolare maniera di vedere, ed i suoi sforzi erano tutti diretti a penetrare in questo campo coi suoi metodi più elementari. Quando fece (1883) il primo passo su questa via, he gli schiuse la veduta sulla natura geometrica della trasformazione univoca algebrica d'una curva generale di 3º ordine in sè stessa, egli ebbe per tale successo una grande gioia, di cui lo scrittore di queste righe serba vivo ricordo.

Questa veduta diventò da allora anche la base per i suoi studi ulteriori sulle curve di genere uno, tra i più bei frutti dei quali sono da annoverarsi numerose ed eleganti proprietà da lui scoperte sulle curve del quinto e del sesto ordine del genere uno.

Ci limitiamo ad una succinta esposizione della natura dei lavori del Weyn, senza darne per esteso i titoli, per brevità di spazio; invero grande è il numero delle sue pubblicazioni, che ascendono a circa un centinaio e mezzo (\*). Egli fu un lavoratore incessante ed infaticabile, quasi avesse presentito che il tempo della sua attività era ristretto in angusti confini.

Avremmo un'immagine incompleta dell'operosità di Emilio Weyr, se non pensassimo anche alla sua attività didattica.

Le sue lezioni all'Università di Vienna erano semplici e disadorne, ma d'una esemplare chiarezza, tanto che anche il più corto d'ingegno poteva seguirlo senza fatica. A lui è dovuta principalmente la vasta estensione che le cognizioni geometriche e lo studio dei metodi della geometria hanno tra gli insegnanti delle scuole secondarie d'Austria. A lui pure si deve molta gratitudine, perché durante la sua operosità in Vienna la produzione scientifica matematica ha ricevuto in Austria un incremento assai considerevole, come appare dai volumi delle «Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften», dove i lavori matematici prendono un grande spazio e predominano quelli che hanno per oggetto studi geometrici. La massima parte di questi studi è di lui e dei suoi scolari, tra i quali qui nominerò soltanto quello che in morte lo precedette, l'Ameseder.

Insieme al prof. Gustavo Ritter von Escherich, il Weyr ha fondato nel 1889 i «Monatshefte für Mathematik und Physik».

Semplice e piana fu la sua vita, senza lotte, senza privazioni. Sull'giovane i gradi della carriera accademica. Nato nel 1848, nel 1871 fu nominato professore straordinario al Politecnico Boemo in Praga, e nel 1875 fu chiamato come professore ordinario all'Università di Vienna. Distinzioni non gli sono mancate. Tra l'altro egli era membro effettivo dell'Accademia delle Scienze in Vienna e dell'Accademia-Francesco-Giuseppe in Praga, e poco prima della sua morte ricevette il titolo di Consigliere Aulico. Sposatosi fin dal 1877 con Maria Vaněk Edle von Domyslov ebbe due figli ed una figlia, e poteva dirsi felice; quando colto, per invidia degli Dei, da una crudele malattia fu rapito dopo lunga sofferenza nell'età migliore.

---

(\*) L'elenco dei lavori del Weyr si trova stampato nell'Annuario della Università di Vienna per l'anno scolastico 1893-94.

## ESTRATTI DAI VERBALI.

[Vedi t. VIII, pp. 166-168].

### ADUNANZA DEL 28 GENNAJO 1894. (Presidenza F. Caldarella).

**Corrispondenza.** — Con lettera in data del dicembre 1893 il dott. Enrico Barone si dimette da socio del Circolo. — A nome del socio professore comm. G. Battaglini, la consorte di lui, signora Anna Battaglini, ringrazia il Circolo pei voti espressi nell'adunanza del 7 gennajo 1894.

**Ammisione di nuovi soci.** — Dietro votazioni a scrutinio segreto: il sig. Antonino Romeo, tenente del Genio nella Direzione territoriale di Palermo, proposto nella precedente adunanza dai soci Guccia e Gerbaldi, è eletto *socio residente*; ed il prof. Carlo Somigliana (Pavia), proposto nella precedente adunanza dai soci Vivanti e Gerbaldi, è eletto *socio non residente*.

#### **Memorie e Comunicazioni.**

GERBALDI: *Sulle singolarità della Jacobiana di tre curve piane.* (Continuaz. e fine; vedi adunanza del 24 dicembre 1893).

TORELLI: *Sul gruppo monomio individuato da una trasformazione infinitesimale proiettiva.*

### ADUNANZA DELL'11 FEBBRAJO 1894. (Presidenza F. Caldarella).

Il PRESIDENTE partecipa, con dolore, l'infesta nuova della morte del socio non residente Emilio Weyr, avvenuta in Vienna il 25 gennajo u. s. e rammenta la degna carriera scientifica dell'illustre professore dell'Università di Vienna, la cui perdita è irreparabile lutto per la Scienza.

**Ammisione di nuovi soci.** — Dietro votazione a scrutinio segreto, il dott. Filiberto Castellano (Torino), proposto nella precedente adunanza dai soci Peano e Gerbaldi, è eletto *socio non residente*.

#### **Memorie e Comunicazioni.**

BIANCHI: *Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten.*

### ADUNANZA DEL 25 FEBBRAJO 1894. (Presidenza F. Caldarella).

Il PRESIDENTE partecipa, con profondo rammarico, alla Società la morte del socio non residente Eugenio Catalan, avvenuta a Liegi il dì 14 febbrajo corr. e rammenta gli alti titoli di benemerenza acquistati dall'eminente professore dell'Università di Liegi in una lunga esistenza così degnamente spesa a vantaggio della scienza e dell'insegnamento.

**Corrispondenza.** — Il prof. Carlo Somigliana ringrazia per la sua ammissione a socio del Circolo.

#### **Memorie e Comunicazioni.**

GUCCIA: *Sulle involuzioni di specie qualunque, dotate di singolarità ordinarie.*

## ADUNANZA DELL'11 MARZO 1894. (Presidenza A. Venturi).

Il PRESIDENTE partecipa alla Società che, in seguito a votazione a sensi dell'art. 20 dello Statuto, il Consiglio Direttivo (Comitato di Redazione dei Rendiconti) ha eletto il prof. G. B. Guccia quale delegato a dirigere la pubblicazione dei Rendiconti.

**Corrispondenza.** — Con lettera del 6 marzo 1894 il prof. Stefano Pagliani si dimette da socio del Circolo (a partire dal 1<sup>o</sup> gennaio 1895).

**Ammissione di nuovi soci.** — Dietro votazioni a scrutinio segreto: il dott. Nicola Amici (Roma), proposto nella precedente adunanza dai soci Cerruti e Guccia; il prof. F. J. Studnička (Praga), proposto nella precedente adunanza dai soci Loria e Guccia; ed il dott. Giovanni Vailati, proposto nella precedente adunanza dai soci Peano e Porro, sono eletti *soci non residenti*.

**Affari interni.** — Esposizione ed approvazione del Conto consuntivo dell'esercizio 1893, reso dal Tesoriere, e del Bilancio di previsione per 1894.

**Memorie e Comunicazioni.**

GUCCIA: *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie.* (Memoria II\*).

## ADUNANZA DEL 25 MARZO 1894. (Presidenza F. Caldarella).

**Memorie e Comunicazioni.**

GARIBALDI: *Sull'estensione degli aggregati numerabili.*

POINCARÉ: *Sur les équations de la Physique Mathématique.*

BURALI-FORTI: *Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti.*

GUCCIA: *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie.* (Memoria II\*). (Continuaz. e fine).

## ADUNANZA DELL'8 APRILE 1894. (Presidenza F. Caldarella).

**Ammissione di nuovi soci.** — Dietro votazione a scrutinio segreto, il dott. Domenico Amanzio (Napoli), proposto nella precedente adunanza dai soci Torelli e Guccia, è eletto *socio non residente*.

## ADUNANZA DEL 22 APRILE 1894. (Presidenza F. Caldarella).

**Corrispondenza.** — Il dott. Domenico Amanzio ringrazia per la sua ammissione a socio del Circolo.

**Memorie e Comunicazioni.**

AMICI: *Risoluzione della congruenza  $x^m \equiv b \pmod{2^y}$ .*

## ADUNANZA DEL 13 MAGGIO 1894. (Presidenza F. Caldarella).

Il PRESIDENTE dà il triste annuncio della morte del socio prof. comm. Giuseppe Battaglini, avvenuta in Napoli il 29 aprile u. s., e tesse brevemente gli elogi del compianto illustre professore dell'Università di Napoli. Dopo di che dà la parola al socio prof. Torelli. [Vedi questi Rendiconti, t. VIII, pp. 180-186].

Il Segretario legge la seguente proposta della Società Reale di Londra (\*):

« The Royal Society, Burlington House, 11 aprile 1894. — Londra.

« *Al Presidente del Circolo Matematico di Palermo.*

« Come probabilmente saprete, la Società Reale di Londra ha pubblicato il nono volume del *Catalogo delle memorie scientifiche*, essendo uscito nell'anno scorso il 1º volume della decade 1874-83.

« Tale catalogo è limitato alla letteratura scientifica *periodica*, cioè a lavori pubblicati negli atti ecc., di società e nei giornali; non tiene conto delle monografie e dei libri di pubblicazione indipendenti comunque importanti. Inoltre i loro titoli sono registrati soltanto in ordine al nome degli autori; e, quantunque la Società abbia da lungo tempo il proposito, che spera di effettuare come chiave dei volumi già pubblicati, di comporre un elenco di quei lavori fatto per materie, tuttavia il Catalogo viene ancora compilato secondo i nomi degli autori. Oltre a ciò, sebbene la Società abbia cercato di includervi i titoli di tutti i lavori scientifici pubblicati nei periodici di importanza notoria, tuttavia è duopo confessare che il Catalogo è incompleto, anche riguardo alla letteratura periodica, causa l'ammissione di lavori pubblicati in periodici meno importanti o non facili ad aversi.

« Causa il grande sviluppo della letteratura scientifica, il compito della Società nella continuazione del Catalogo, anche nella forma attuale, incontra delle difficoltà che crescono rapidamente. In pari tempo è chiaro quanto gioverebbe al progresso scientifico la pubblicazione di un Catalogo possibilmente completo e contenente i titoli delle pubblicazioni scientifiche che appajono tanto nei periodici che fuori di questi. In tale Catalogo i lavori dovrebbero essere ordinati non solo per i nomi degli autori, ma anche in relazione al loro soggetto, dovensi consultare per questo fine il testo del lavoro oltre il suo titolo. E il valore del Catalogo crescerebbe non poco con una pubblicazione periodica frequente e di tal forma che si avessero separatamente le parti concernenti le singole branche speciali della scienza.

« Non è duopo dire che la preparazione e la pubblicazione di un catalogo così completo eccede di gran lunga il potere e i mezzi di qualunque società che vi attenda da sola.

« Guidati dalle esposte considerazioni, il Presidente e il Consiglio della Società Reale hanno incaricato una Commissione di studiare e riferire sulla possibilità di compilare un Catalogo così fatto mediante una cooperazione internazionale.

« La Commissione non è ancora riuscita a formolare un piano di lavoro per la detta cooperazione; ma saranno utili intanto le seguenti proposte preliminari:

« Il Catalogo comincerà coi lavori pubblicati a partire dal 1º gennajo 1900.

« In un luogo da scegliersi in seguito si stabilirà un ufficio centrale che

(\*) Si riproduce qui la traduzione italiana pubblicata dal R. Istituto Lombardo a pp. 349-351 del vol. XXVII (serie II) dei suoi Rendiconti.

verrà mantenuto mediante contribuzioni internazionali, sia direttamente cioè con sussidi annui o d'altra natura, sia indirettamente cioè coll'impegno dell'acquisto di un certo numero di copie del Catalogo.

« A tale ufficio si daranno regolarmente tutte le informazioni necessarie a comporre il Catalogo. Ciò si potrà fare col mandarvi direttamente i periodici, le monografie, ecc., da catalogare, oppure parti di Catalogo già preparate da diversi istituti, o facendo insieme una cosa e l'altra.

« Nell'ufficio si dovrebbe, insieme alla preparazione del Catalogo, attendere a comporre delle tabelle di dati scientifici, di mano in mano che vengono forniti dai lavori presentati.

« Il primo passo però è di constatare se sia possibile e desiderabile uno schema di collaborazione internazionale. Di conseguenza la Commissione desidera di conoscere su questo proposito l'opinione dei corpi scientifici e degli scienziati.

« Ci lusinghiamo pertanto che avrete la bontà di sottoporre quanto prima l'argomento al giudizio del *Circolo Matematico di Palermo* e di informarci, per uso della Commissione, delle conclusioni a cui si arriverà.

« Se la decisione che riferirete sarà in qualche modo favorevole al progetto vi pregheremo inoltre, sempre per uso della Commissione, di comunicarci i suggerimenti che vi parranno opportuni sul miglior modo di effettuare il progetto, sulla costituzione dell'Ufficio centrale e sui mezzi di mantenerlo, sul carattere preciso del lavoro che vi si avrà da compiere, sulla lingua o sulle lingue in cui dovrà pubblicarsi il Catalogo, e altri simili.

Vostri servi obbedienti:

« M. FOSTER, Segret. della S. R.

« RAYLEIGH, Segret. della S. R.

« J. LISTER, Segret. estero della S. R. »

**Ammissione di nuovi soci.** — Dietro votazioni a schede segrete, i signori: prof. George Bruce Halsted (Austin, Texas, U. S. A.), proposto nella precedente adunanza dai soci Loria e Guccia, ed il prof. Onofrio Porcelli (Bari), proposto nella precedente adunanza dai soci Cerruti e Guccia, sono eletti soci non residenti.

#### Memorie e Comunicazioni.

DEL RE: *Sopra una quistione relativa alla teoria delle curve piane algebriche.*

SOLER: *Sopra una certa deformata della sfera.*

FQURET: *Sur le nombre des plans tangents que l'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface.*

---

ADUNANZA DEL 27 MAGGIO 1894. (Presidenza F. Calderara).

**Corrispondenza.** — Il prof. Onofrio Porcelli ringrazia per la sua ammissione a socio del Circolo.

#### Affari interni.

---

## ADUNANZA DEL 10 GIUGNO 1894. (Presidenza G. B. Guccia).

Il Circolo delibera di ringraziare il Sindaco ed il Consiglio Comunale di Palermo per il sussidio di L. 500 accordato alla Società per 1894, a titolo d'incoraggiamento per la pubblicazione dei Rendiconti.

**Corrispondenza.** — La Facoltà delle Scienze di Marsiglia propone il cambio delle sue pubblicazioni coi Rendiconti del Circolo. Il Circolo aderisce.

## ADUNANZA DEL 24 GIUGNO 1894. (Presidenza F. Caldarella).

**Affari interni.**

## ADUNANZA DELL'8 LUGLIO 1894. (Presidenza F. Caldarella).

**Ammissione di nuovi soci.** — Dietro votazioni a schede segrete, il dottore Pacifico Massimi (Roma), proposto nella precedente adunanza dai soci Arcolongo e Gerbaldi, ed il dott. Pietro Burgatti (Roma), proposto nella precedente adunanza dai soci Cerruti e Guccia, sono eletti *soci non residenti*.

**Memorie e Comunicazioni.**

BURGATTI: *Un teorema di Meccanica.*

## ADUNANZA DEL 22 LUGLIO 1894. (Presidenza F. Caldarella).

**Corrispondenza.** — La Facoltà di Lilla propone il cambio delle sue pubblicazioni coi Rendiconti del Circolo. Il Circolo aderisce.

**Ammissione di nuovi soci.** — Dietro votazione a schede segrete, il dottore Federigo Enriques (Bologna), proposto dai soci Castelnuovo e Guccia, è eletto *socio non residente*.

DE VRIES: *Zur Theorie der Tripelsysteme.*

KANTOR: *Sur les courbes hyperelliptiques portant des correspondances univoques.*

## ADUNANZA DEL 12 AGOSTO 1894. (Presidenza F. Caldarella).

**Corrispondenza.** — Il dott. F. Enriques (Bologna) ringrazia per la sua ammissione a socio del Circolo. — La R. Accademia di Torino partecipa la morte del suo presidente prof. comm. Michele Lessona, senatore del Regno, avvenuta il 20 luglio u. s.

**Ammissione di nuovi soci.** — Dietro votazione a schede segrete, il signor Fortunato Bucca (Palermo), proposto nella precedente adunanza dai soci orelli e Certo, è eletto *socio residente*.

**Memorie e Comunicazioni.**

LAISANT: *Note sur les invariants des polinômes entiers.*

## ADUNANZA DEL 26 AGOSTO 1894. (Presidenza F. Caldarella).

**Affari interni.**

ADUNANZA DELL'11 NOVEMBRE 1894. (Presidenza M. L. Albegiani).

**Memorie e Comunicazioni.**

FANO ed ENRIQUES: *Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva* (Corrispondenza).

MOORE: *Concerning Triple Systems.*

GERBALDI: *Sulle involuzioni di specie qualunque.*

ADUNANZA DEL 25 NOVEMBRE 1894. (Presidenza M. L. Albegiani).

**Affari interni.**

ADUNANZA DEL 9 DICEMBRE 1894. (Presidenza F. Caldarelli).

**Corrispondenza.** — Il PRESIDENTE partecipa alla Società che S. E. il Ministro della P. I., con lettera del 22 ottobre 1894, ha concesso al Circolo un susseguo di L. 800 per la pubblicazione dei suoi Rendiconti. Il Circolo delibera, all'unanimità, un voto di ringraziamento a S. E. il Ministro.

**Memorie e Comunicazioni.**

GUCCIA: *Sui vincoli esistenti fra i punti di contatto delle tangenti condotte da un punto a k curve algebriche piane.*

L'Autore comunica il seguente enunciato, che è una generalizzazione di una proposizione da lui dimostrata nel n° 76 delle sue *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singularità ordinarie* (Memoria II<sup>a</sup>) (questi Rendiconti, t. IX, pp. 1-64):

TEOREMA. — *Siano nel piano:*

$$C_1, C_2, \dots C_k$$

*k curve algebriche, d'ordini*

$$n_1, n_2, \dots n_k,$$

*le quali passano, per un medesimo punto O, rispettivamente con*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k \quad (\alpha_i \geq 0)$$

*rami a tangenti distinte e diverse per due qualunque di esse.*

*Esiste un sistema lineare  $\infty^{k-1}$  di curve,  $[\Theta]$ , dell'ordine  $n_1 + n_2 + \dots + n_k - 1$ , la curva generica del quale passa:*

*con  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$  rami per il punto O ed ha ivi le stesse tangenti delle curve  $C_1, C_2, \dots C_k$ ;*

*con un ramo, a tangente mobile, per ciascuno degli ulteriori*

$$\sum_{i,j} (n_i n_j - \alpha_i \alpha_j)$$

*punti d'incontro delle curve  $C_1, C_2, \dots C_k$ , due a due;*

*con un ramo, a tangente mobile, per ciascuno dei*

$$\sum_i [n_i (n_i - 1) - \alpha_i (\alpha_i + 1)]$$

punti di contatto delle rette che si possono condurre da O a toccare altrute le curve  $C_1, C_2, \dots, C_k$ .

Indicando con

$$|C|_p$$

un gruppo qualunque di  $p$  ( $0 \leq p \leq k$ ) curve scelte fra le  $k$  curve date  $C_1, C_2, \dots, C_k$  e con

$$|C|_{k-p}$$

il gruppo delle curve residuali, il sistema lineare  $\infty^{k-1}[\Theta]$  contiene una curva  $\Theta'$ , tale che:

1° in uno qualsiasi,  $a$ , degli ulteriori punti comuni ad una curva del gruppo  $|C|_p$  e ad una curva del gruppo  $|C|_{k-p}$  ha per tangente la retta  $Oa$ ;

2° in uno qualsiasi,  $b$ , degli ulteriori punti comuni a due curve del gruppo  $|C|_p$  (ovvero a due curve del gruppo  $|C|_{k-p}$ ), ha per tangente la retta coniugata armonica di  $Ob$  rispetto alle due tangenti in  $b$  alle dette due curve.

Il numero delle curve  $\Theta'$  (associate alle singole coppie  $|C|_p, |C|_{k-p}$ ) è:

$$\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} = 2^{k-1}.$$

#### ADUNANZA DEL 23 DICEMBRE 1894. (Presidenza F. Caldarella).

**Corrispondenza.** — Il socio Gerbaldi fa dono al Circolo dell'opera in due volumi intitolata: *Scritti di Leonardo Pisano pubblicati da B. Boncompagni* (Roma, 1857, 1862). Il Circolo ringrazia.

**Ammissione di nuovi soci.** — Dietro votazioni a schede segrete, i signori prof. Alexander Macfarlane (Ithaca, New-York, U. S. A.), proposto nella precedente adunanza dai soci Guccia e Gerbaldi, e prof. Gregorio Ricci (Padova), proposto nella precedente adunanza dall'Ufficio di Presidenza, sono eletti *soci non residenti*; ed il sig. dott. Ezio Crescini (Palermo), proposto nella precedente adunanza dai soci Certo e Cantone, è eletto *socio residente*.

#### Memorie e Comunicazioni.

**GARIBALDI:** *Intorno all'annullarsi di un invariante.*

**PENNACCHIETTI:** *Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili.*

**MACCAFERRI:** *Su di un teorema fondamentale relativo agli elementi comuni di due coniche in un piano.*

#### ADUNANZA DEL 13 GENNAIO 1895. (Presidenza F. Caldarella).

**Corrispondenza.** — Con lettera del 27 dicembre 1894, il dott. Carlo Bigiavì si dimette da socio del Circolo.

**Ammissione di nuovi soci.** — Dietro votazioni a schede segrete: il Marchese Gabriele Terzi (Bergamo), proposto nella precedente adunanza dai soci Torelli e Guccia, è eletto *socio non residente*, ed il sig. Michele De

**Franchis** (Palermo), proposto nella precedente adunanza dai soci Guccia e Gerbaldi, è eletto *socio residente*.

**Memorie e Comunicazioni.**

**PENNACCHIETTI**: *Sull'integrazione dell'equazione di Poisson.*

**BORTOLOTTI** (Sig.Emma): *Sulle frazioni continue algebriche periodiche.*

**VIVANTI**: *Preliminari per lo studio delle funzioni di due variabili.*

**ADUNANZA DEL 27 GENNAJO 1895.** (Presidenza F. Caldarella).

**Affari interni.** — Esposizione ed approvazione del Conto consuntivo dell'esercizio 1894, reso dal Tesoriere, e del Bilancio di previsione per 1895.

**Ammissione di nuovi soci.** — S. E. il Generale L. F. Menabrea, marchese di Val Dora, è eletto, per acclamazione, *socio non residente*.

**Memorie e Comunicazioni.**

**MENABREA**: *Una pagina di storia vera sul Trasforo delle Alpi tra Bardonecchia e Modana.* [Per desiderio espresso dall'Autore questo manoscritto sarà conservato negli Archivi della Società].

**ADUNANZA DEL 10 FEBBRAJO 1895.** (Presidenza F. Caldarella).

**Corrispondenza.** — Il PRESIDENTE dà il triste annuncio della morte del signor T.-J. Stieljès, professore di Calcolo differenziale ed integrale nella Facoltà di Scienze di Tolosa, avvenuti in Tolosa il 31 dicembre 1894. — S. E. il Generale Menabrea, marchese di Val Dora, ringrazia per la sua ammissione a socio del Circolo.

**Memorie e Comunicazioni.**

**BERZOLARI**: *Sulle secanti multiple di una curva algebrica dello spazio a tre od a quattro dimensioni.*

**MURER**: *I divisori dei numeri della forma  $a^x - 1$ .*

**ADUNANZA DEL 24 FEBBRAJO 1895.** (Presidenza G. B. Guccia).

**Ammissione di nuovi soci.** — Dietro votazione a schede segrete, il dottor Tullio Levi Civita (Padova), proposto nella precedente adunanza dai soci Pincherle e Guccia, è eletto *socio non residente*.

**ADUNANZA DEL 10 MARZO 1895.** (Presidenza F. Gerbaldi).

**Ammissione di nuovi soci.** — Dietro votazioni a schede segrete, i signori Giovanni Di Pirro (Roma), proposto nella precedente adunanza dai soci Cerruti e Guccia, e l'ing. Angelo Neppi Modona (Girgenti), proposto nella precedente adunanza dai soci Gerbaldi e Guccia, sono eletti *soci non residenti*.

**Memorie e Comunicazioni.**

**DI PIRRO**: *Sulle trasformazioni delle equazioni della Dinamica.*

**GARIBALDI**: *Un piccolo contributo alla teoria degli aggregati.*

ADUNANZA DEL 24 MARZO 1895. (Presidenza F. Caldara rera).

**Affari interni.**

ADUNANZA DEL 14 APRILE 1895. (Presidenza F. Gerbaldi).

**Memorie e Comunicazioni.**

ASCIONE: *Su di un teorema di Geometria proiettiva.* [Vedi p. 208].

ADUNANZA DEL 28 APRILE 1895. (Presidenza G. B. Guccia).

**Ammissione di nuovi soci.**—Dietro votazioni a schede segrete, i signori: Gerolamo Cordone (Genova), proposto nella precedente adunanza dai Loria e Garibaldi, ed il sig. dott. Paolo Painlevé (Parigi), proposto a precedente adunanza dai soci Humbert e Guccia, sono eletti *soci non residenti*.

**Memorie e Comunicazioni.**

VIVANTI: *Sulla irrazionalità icosidrica.*

ADUNANZA DEL 12 MAGGIO 1895. (Presidenza F. Caldara rera).

**Memorie e Comunicazioni.**

CORDONE: *Sulla congruenza generale di 4º grado secondo un modulo primo.*

ADUNANZA DEL 26 MAGGIO 1895. (Presidenza G. B. Guccia).

CORDONE: *Sulla congruenza generale di 4º grado secondo un modulo primo.*  
continuaz. e fine).

ADUNANZA DEL 9 GIUGNO 1895. (Presidenza F. Gerbaldi).

**Affari interni.**

ADUNANZA DEL 23 GIUGNO 1895. (Presidenza G. B. Guccia).

**Memorie e Comunicazioni.**

PICARD: *Sur la théorie des groupes et des surfaces algébriques.*

ADUNANZA DEL 14 LUGLIO 1895. (Presidenza G. B. Guccia).

**Memorie e Comunicazioni.**

DICKSON: *A Quadratic Cremona Transformation Defined by a Conic.*

ASCIONE: Errata-Corrigé alle Osservazioni: «*Su di un teorema di Geometria proiettiva*» (questi Rendiconti, t. IX, pag. 208). A linee 34, 35 invece di *poichè il gruppo URMM, è prospettivo al gruppo (UA, r, s, s<sub>1</sub>)* leggasi: *poichè il gruppo URMM, è prospettivo al gruppo di punti secondo cui SS<sub>1</sub> seca gruppo (UA, r, s, s<sub>1</sub>)*. Questa correzione è già comparsa nella seconda ione delle *Lezioni di Geometria proiettiva* del prof. Achille Sannia, oli, B. Pellerano, 1895.

LAGNA: *Le relazioni irriduttibili fra gl'invarianti di una forma qualunque lavo ordine.*

G. B. G.

## ERRATA CORRIGE.

A pagina 309 del t. VII, dopo la linea 14 aggiungasi:

**Ammissione di nuovi soci.** — Dietro votazione a schede segrete, il dottore Giuseppe Lauricella (Girgenti), proposto nella precedente adunanza dai soci Volterra e Guccia, è eletto *socio non residente*.

**Tomo IX (1895)—Parte I: MEMORIE E COMUNICAZIONI.**

---

# INDICE

---

## ESTRATTI DAI VERBALI

Adunanze dal 28 gennajo 1894 al 14 luglio 1895 . . . . .	263-271
Errata-Corrigè . . . . .	272

## MEMORIE E COMUNICAZIONI (\*)

**Ancione, E.** (Caserta).

Su di un teorema di Geometria proiettiva. (Osservazioni) . . . . .	208
*Errata-Corrigè . . . . .	271

**Berzolari, L.** (Torino).

Sulle secanti multiple di una curva algebrica dello spazio a tre od a quattro dimensioni. (Estratto di Lettera diretta al professore C. F. Geiser) . . . . .	186-197
--	---------

**Bortolotti, Emma** (Bologna).

Sulle frazioni continue algebriche periodiche . . . . .	136-149
---	---------

**Burgatti, P.** (Roma).

Un teorema di Meccanica . . . . .	125-135
-----------------------------------	---------

**Cordone, G.** (Genova).

Sulla congruenza generale di 4º grado secondo un modulo primo.	209-243
--	---------

**Dickson, L. E.** (Chicago).

A Quadratic Cremona Transformation defined by a Conic . .	256-259
---	---------

**Di Pirro, G.** (Roma).

Sulle trasformazioni delle equazioni della Dinamica . . . . .	169-185
---	---------

**Fano, G.** ed **Enriques, F.** (Roma e Bologna).

Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva. (Corrispon- denza). . . . .	79-85
---	-------

---

(\*) Il segno \* è apposto alle Comunicazioni inserite nei verbali delle Adunanze.

<b>Garibaldi, C.</b> (Genova).	
Un piccolo contributo alla teoria degli aggregati . . . . .	198-201
<b>Gerbaldi, F.</b> (Palermo).	
Sulle involuzioni di specie qualunque . . . . .	167-168
<b>Guccia, G. B.</b> (Palermo).	
Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie. (Memoria II <sup>a</sup> ) . . . . .	1-64
* Sui vincoli esistenti fra i punti di contatto delle tangenti condotte da un punto a $k$ curve algebriche piane . . . . .	268-269
<b>Kantor, S.</b>	
Sur les courbes hyperelliptiques portant des correspondances univoques . . . . .	65-78
<b>Kohn, G.</b> (Wien).	
Emilio Weyr. (Dai <i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i> — Traduzione di F. Gerbaldi). . . . .	260-262
<b>Maccaferri, E.</b> (Bologna).	
Su di un teorema fondamentale relativo agli elementi comuni di due coniche in un piano . . . . .	96-107
<b>Moore, E. H.</b> (Chicago).	
Concerning triple Systems . . . . .	86
<b>Pennacchietti, G.</b> (Catania).	
Sull'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili . . . . .	87-95
<b>Picard, Ém.</b> (Paris).	
A propos de quelques récents travaux mathématiques. (Dalla <i>Revue générale des sciences pures et appliquées</i> ) . . . . .	150-158
Sur la théorie des surfaces algébriques. (Dalla <i>Revue générale des sciences pures et appliquées</i> ) . . . . .	159-166
Sur la théorie des groupes et des surfaces algébriques. . . . .	244-255
<b>Vivanti, G.</b> (Pavia).	
Preliminari per lo studio delle funzioni di due variabili . . . . .	108-124
Sulla irrazionalità icosaedrica . . . . .	202-207

## INDICE GENERALE

---

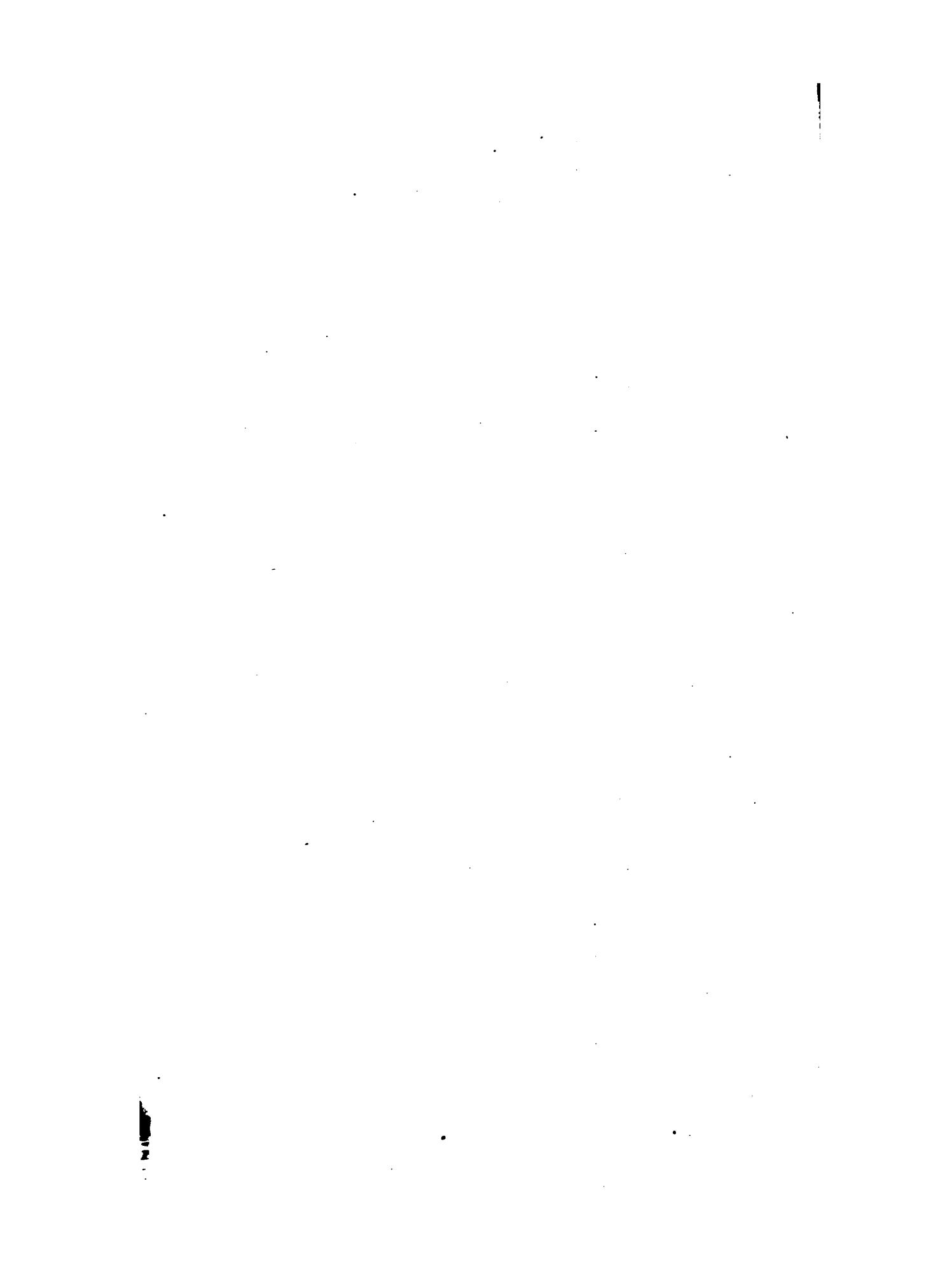
- |   |  |
|---|--|
| <p>Abel 75, 160.<br/>     Alagna 271.<br/>     Amanzio 264.<br/>     Ameseder 262.<br/>     Amici 264.<br/>     Amodeo 80.<br/>     Appell 155, 169, 185.<br/>     Ascione 208, 271.</p> <p>Barone 263.<br/>     Battaglini (signora Anna) 263.<br/>     Battaglini 137, 263, 264.<br/>     Beltrami 87, 90, 93, 94.<br/>     Bertini 165.<br/>     Berzolari 186-197, 270.<br/>     Bianchi 263.<br/>     Bigiavi 269.<br/>     Bobek 34.<br/>     Boncompagni 269.<br/>     Bortolotti (sig.Emma) 136-149, 270.<br/>     Brianchon 257.<br/>     Brill 161, 261.<br/>     Brioschi 134.<br/>     Bucca 267.<br/>     Burali-Forti 264.<br/>     Burgatti 125-135, 183, 267.</p> <p>Cantor 198, 200.<br/>     Caporali 54, 69.<br/>     Castellano 263.<br/>     Castelnuovo 165, 166, 197, 255.<br/>     Catalan 137, 263.<br/>     Cauchy 109, 156, 160, 209.<br/>     Cayley 163.<br/>     Chasles 96, 260.</p> | <p>Chelini 186.<br/>     Chizzoni 63.<br/>     Clebsch 161, 162, 165, 261.<br/>     Cordone 209-243, 271.<br/>     Cramer 159.<br/>     Cremona 2, 17, 18, 19, 25, 26, 28, 29,<br/>         41, 48, 56, 253, 256, 260.<br/>     Crescini 269.</p> <p>Darboux 125, 162.<br/>     Dautherville 185.<br/>     De Franchis 270.<br/>     Del Re 266.<br/>     Dickson 256-259, 271.<br/>     Di Pirro 169-185, 270.<br/>     Doeblemann 34, 39.<br/>     Domyslov 262.</p> <p>Enriques 82-84, 97, 101, 106, 165, 166,<br/>         255, 267, 268.<br/>     Escherich 262.</p> <p>Fano 79-82, 84-85, 268.</p> <p>Ferrari 211.</p> <p>Fiedler 260.</p> <p>Foster 266.</p> <p>Fouret 266.</p> <p>Fuchs 156.</p> <p>Galois 156.</p> <p>Garibaldi 198-201, 264, 269, 270.</p> <p>Gauss 150, 151.</p> <p>Geiser 186.</p> <p>Gerbaldi 23, 167-168, 260, 263, 268,<br/>         269.</p> |
|---|--|

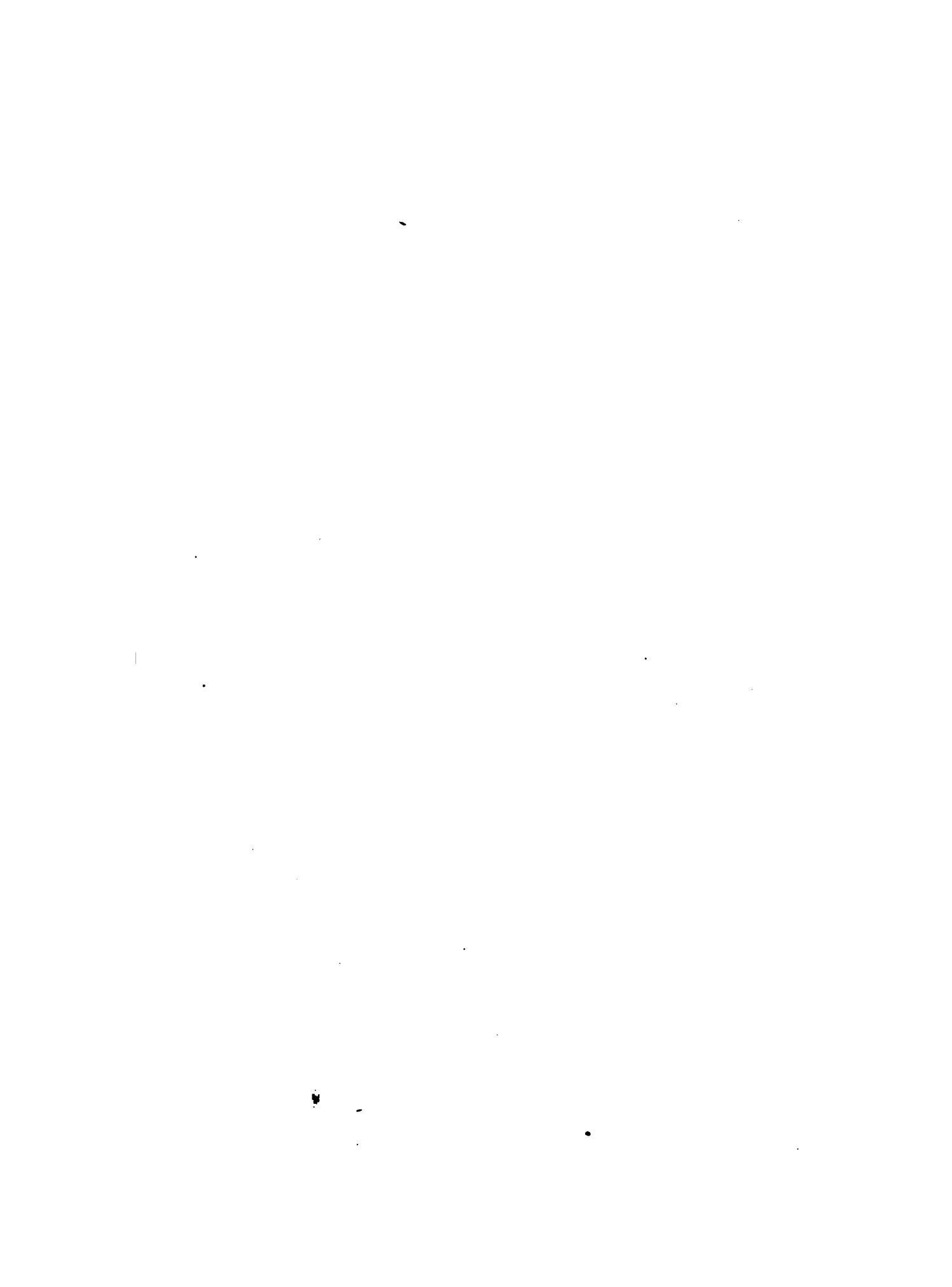
- Gerono 137, 149.  
 Giudice 210, 211, 212, 215.  
 Gordan 161.  
 Goursat 127, 169.  
 Guccia 1-64, 165, 167, 190, 263, 264,  
     268-269.  
  
 Halphen 21, 155, 165.  
 Halsted 266.  
 Hamilton 126, 129, 130, 153.  
 Helmholz 151, 152.  
 Humbert 164, 165.  
 Hurwitz 65.  
  
 Jacobi 34.  
 Jonquières (de) 69, 70, 71, 72, 73, 74,  
     75, 76, 77, 78.  
  
 Kantor 65-78, 267.  
 Klein 202, 204.  
 Koenigs 109.  
 Kohn 52, 260-262.  
 Kronecker 166.  
 Kummer 162, 165.  
  
 Lagrange 136, 137, 148, 169, 178.  
 Laguerre 155.  
 Laisant 267.  
 Lauricella 272.  
 Leonardo Pisano 269.  
 Lessona 267.  
 Levi Civita 270.  
 Lie (Sophus) 150, 151, 152, 154, 155,  
     156, 166.  
 Liouville (R.) 155.  
 Lister 266.  
  
 Maccaferri 96-107, 208, 269.  
 Macfarlane 269.  
 Maggi 87.  
 Massimi 267.  
 Menabrea 270.  
 Ministro della P. L 268.  
 Moore 86, 268.  
 Morera 87.  
 Moutard 162.  
  
 Murer 270.  
  
 Neppi Modona 270.  
 Netto 86, 203, 205.  
 Newton 159.  
 Noether 161, 162, 163, 165, 166, 261.  
  
 Oltramare 209, 218, 220, 221, 232, 233,  
     236, 237.  
  
 Padova 87.  
 Paglianî 264.  
 Painlevé 156, 170, 271.  
 Pascal 257.  
 Peano 210.  
 Pennacchietti 87-95, 269, 270.  
 Picard 123, 124, 150-158, 159-166,  
     244-255, 271.  
 Picciati 87, 185.  
 Picquet 190, 195, 197.  
 Pincherle 136.  
 Plücker, 39, 44.  
 Poincaré 108, 124, 154, 156, 157, 264.  
 Porcelli (O.) 266.  
 Puiseux 160.  
  
 Rayleigh 266.  
 Reye 260.  
 Riccati 156.  
 Ricci 269.  
 Riemann 109, 123, 150, 151, 160, 161,  
     164.  
 Romeo 263.  
  
 Sannia 96, 98, 208.  
 Scheffer 154.  
 Schubert 187, 197.  
 Segre 165, 193.  
 Sindaco di Palermo 267.  
 Soler 266.  
 Somigliana 263.  
 Staekel 125, 183.  
 Staudt 96, 97, 98, 99, 260.  
 Steiner 162, 166.  
 Stieljès 270.  
 Studnička 264.

- |   |   |
|---|---|
| Terzi 269.<br>Torelli 263, 264.<br><br>Vailati 264.<br>Vandermonde 168.<br>Veronese 193, 194.<br>Vessiot 156.<br>Vivanti 108-124, 198, 202-207, 270,<br>271.<br>Volterra 87, 109. | Vries (de) 86, 267.<br><br>Weierstrass 152, 153.<br>Weyr (Edoardo) 260.<br>Weyr (Emilio) 260, 261, 262, 263.<br>Weyr (Francesco) 260.<br><br>Zeuthen 163.<br>Zsigmondy 148. |
|---|---|

*Fine della Parte I<sup>a</sup> del Tomo IX (1895).*







RENDICONTI  
DEL  
CIRCOLO MATEMATICO  
DI PALERMO

---



RENDICONTI  
DEL  
CIRCOLO MATEMATICO  
DI PALERMO

---

TOMO IX. — ANNO 1895.

---

PARTE SECONDA : BIBLIOTECA MATEMATICA.

---

PALERMO,  
*SEDE DELLA SOCIETÀ*  
28, via Ruggiero Settimo, 28

---

1895

|

---

## BIBLIOTECA MATEMATICA.

---

### PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

PERVENUTE IN DONO AL CIRCOLO.

---

XII° ELENCO : maggio 1894-febbrajo 1895.

[*Vedi* gli Elenchi precedenti: t. VIII, pp. 1-10 e retro].

---

- Accademia dei Lincei** (Roma). Annuario 1895 (anno CCXCII). Roma, 1895.  
**Amici, N.** (Montecassino). Risoluzione della congruenza  $x^n \equiv b \pmod{2^y}$ . *Rend. Circ. Matem.*, VIII, 1894.
- Antomari, X. et Laisant, G.-A.** (Paris). Questions de Mécanique à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales. Paris, Librairie Nony et Cie, 1895.
- Arnoux, G.** (Paris). Essais de Psychologie et de Métaphysique positives : Arithmétique graphique: *Les espaces arithmétiques hypermagiques*. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894.
- Bianchi, L.** (Pisa). [*Vedi* t. VIII, p. 1]. Sulle superficie i cui piani principali hanno costante il rapporto delle distanze da un punto fisso. *Rend. Acc. Lincei*, 5 agosto 1894.  
— Sulla interpretazione geometrica del teorema di Moutard. *Ibid.*, 17 giugno 1894.  
— Lezioni di Geometria Differenziale (Seconda metà dell'opera). Pisa, Enrico Spoerri, 1895.  
— Complemento alle ricerche sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici. *Ann. Matem.*, XXIII<sub>2</sub>, 1895.
- Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 2<sup>a</sup>.

— Il metodo di Riemann esteso alla integrazione della equazione:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = M u.$$

*Rend. Acc. Lincei*, 6 gennaio 1895.

**Boncompagni, B.** Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo pubblicati da Baldassare Boncompagni. — Volume I. *Leonardi Pisani, Liber abbaci*. Roma, 1857.—Volume II. *Leonardi Pisani, Practica Geometriae ed opuscoli*. Roma, 1862.

**Borghese, F.** (Messina). Un problema sulle trasformazioni piane multiple. *Giorn. di Battaglini*, XXXII, 1894.

**Bortolotti, Emma** (Bologna). Sulle frazioni continue algebriche periodiche. *Rend. Circ. Matem.*, IX, 1895.

**Brambilla, A.** (Napoli). [Vedi t. VIII, p. 2]. La curva doppia di una particolare superficie razionale del 9º ordine. *Ibid.*, XXXII, 1894.

**Brill, A. und Noether, M.** (Tübingen, Erlangen). [Vedi t. VII, p. 2; t. VI, p. 8]. Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. *Jahresb. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, III, 1893.

**Brisse, Ch.** (Paris). Cours de Géométrie Descriptive à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire moderne. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1895.

**Burali-Forti, G.** (Torino). [Vedi t. VIII, p. 2]. Logica Matematica. [Manuali Hoepli]. Milano, 1894.

— Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti. *Rend. Circ. Matem.*, VIII, 1894.

**Bureau des Longitudes** (Paris). Annuaire pour l'an 1895. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1895.

**Burgatti, P.** (Roma). Un teorema di Meccanica. *Rend. Circ. Matem.*, IX, 1895.

**Caldarera, G.** (Catania). [Vedi t. VIII, p. 3]. Sviluppo d'un determinante particolare ad  $n$  variabili. *Atti Acc. Gioenia di Catania*, VII, 1894.

**Capelli, A.** (Napoli). [Vedi t. VII, p. 2]. « Giuseppe Battaglini ». Cennio biografico. *Giorn. di Battaglini*, XXXII, 1894.

— L'Analisi Algebrica e l'interpretazione fattoriale delle potenze. *Ibid.*, XXXI, 1893.

— Dell'impossibilità di savigliate fra le operazioni fondamentali permutabili con ogni altra operazione di polare fra le stesse serie di variabili. *Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli*, 10 giugno 1893.

— Sulla separazione delle radici delle equazioni mediante il Calcolo delle Differenze. — Nota I. *Ibid.*, 17 novembre 1894.—Nota II. *Ibid.*, 15 dicembre 1894.

— Lezioni di Algebra complementare ad uso degli aspiranti alla Licenza Universitaria in Scienze Fisiche e Matematiche. Napoli, Libreria di B. Pellerano, 1895.

- Castellano, F.** (Torino). Alcune applicazioni cinematiche della Teoria dei Vettori. *Rivista di Matem.*, 1892.
- Alcune proprietà delle accelerazioni d'ordine qualunque nel moto di una figura piana nel suo piano. *Ibid.*, 1893.
  - Applicazioni della Teoria dei Vettori al moto centrale di un punto ed alla risoluzione dei problemi relativi. *Atti R. Acc. Sc. di Torino*, XXIX, 3 dicembre 1893.
  - Il complesso delle accelerazioni d'ordine qualunque dei punti di un corpo in movimento. *Ibid.*, XXIX, 28 gennaio 1894.
  - Elementi di Algebra ad uso dei Licei, Istituti Tecnici e Scuole Militari. Torino, Fratelli Bocca, 1891.
  - Lezioni di Meccanica Razionale. Torino, Tip. G. Candelletti, 1894.
- Castelnuovo, G.** (Roma). [Vedi t. VIII, p. 3]. Sulla razionalità delle involuzioni piane. *Mathem. Annalen*, XLIV, 1894.
- Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche. *Rend. Acc. Lincei*, 20 maggio 1894.
- Del Re, A.** (Modena). [Vedi t. VIII, p. 3]. Costruzione delle 16 rette di una superficie del 4º ordine a conica doppia e dei 5 relativi coni di Kummer. *Atti Soc. Naturalisti*, Modena, XII, 1894.
- Joseph Gillet. Théorie des plans hypercycliques des surfaces du second degré. *Periodico di Matem.*, IX, 1894.
  - Sulla superficie del 5º ordine con 5 punti tripli ed una cubica doppia. Nota III. *Rend. Acc. Lincei*, 1 luglio 1894.
- Eck, B.** (Bonn). Ueber die Verteilung der Axen der Rotationsflächen 2. Grades, welche durch gegebene Punkte gehen. Inaugural-Dissertation. Bonn, 1890.
- Eneström, G.** (Stockholm). [Vedi t. VIII, p. 4]. Om Taylors och Nicoles inbördes förtjänster beträffande differenskalkylens första utbildande. *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar*, 11 april 1894.
- Um uppkomsten af tecknen + och — samt de matematiska termerna «plus» och «minus». *Ibid.*, 9 maj 1894.
  - Um upptäckten of sättet att medelst differentiation bestämma värdet af en bråkfunction, då täljare och nämnare samtidigt blifva noll. *Ibid.*, 6 juni 1894.
- Fabris, V.** (Aquila). Pico Fonticulano e la sua Geometria. Aquila, 1894.
- Fano, G.** (Roma). [Vedi t. VIII, p. 4]. Sopra alcune considerazioni geometriche che si collegano alla teoria delle equazioni differenziali lineari. Due Note. *Rend. Acc. Lincei*, 6 e 20 gennaio 1895.
- Fano, G. ed Enriques, F.** (Roma, Bologna). Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva. (Corrispondenza). *Rend. Circ. Matem.*, IX, 1895.
- Fellini, D.** (Forlì). I poliedri regolari stellati. Forlì, Tip. Croppi, 1895.
- Fourret, G.** (Paris). [Vedi t. VIII, p. 4]. Sur le nombre des plans tangents que l'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface. *Rend. Circ. Matem.*, VIII, 13 maggio 1894.

- Galdeano, Z. G. de** (Zaragoza). [Vedi t. VIII, p. 4]. El concepto del imaginario en la ciencia matematica. Conferencia. Zaragoza, C. Arifio, 1891.
- Gerbaldi, F.** (Palermo). [Vedi t. VII, p. 4]. Sulle singolarità della Jacobiana di tre curve piane. *Rend. Circ. Matem.*, VIII, 1894.
- Sulle involuzioni di specie qualunque. *Ibid.*, IX, 1895.
- Giudice, F.** (Genova). [Vedi t. VIII, p. 5]. Teoria delle serie. Parte VIII del Formulario. *Rivista di Matem.*, 1894.
- Sui polinomii. *Periodico di Matem.*, IX, 1894.
- Grousaintsew, A.-P.** (Karkoff). La théorie électromagnétique de la lumière. Karkoff, 1893.
- Guccia, G. B.** (Palermo). [Vedi t. VIII, p. 5]. Sulle involuzioni di specie qualunque dotate di singolarità ordinarie. *Rend. Circ. Matem.*, VIII, 1894.
- Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie. (Memoria II<sup>a</sup>). *Ibid.*, IX, 1895.
- Heinrichs, E.** (Wermelskirchen). Ueber den Bündel derjenigen kubischen Raumcurven, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben. Inaugural-Dissertation. Wermelskirchen, 1887.
- Humbert, G.** (Paris). [Vedi t. V, p. 4]. Sur la théorie générale des surfaces unicursales. *Math. Annalen*, XLV, 1894.
- Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques. Premier Mémoire. *Journ. de Math. pures et appliquées*, X<sub>4</sub>, 1894.
- Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre. *Journ. École Polyt.*, LXIV, 1894.
- Sur les surfaces de Kummer elliptiques. *American Journ.*, XVI, 1894.
- Kantor, S.** Sur les courbes hyperelliptiques portant des correspondances univoques. *Rend. Circ. Matem.*, IX, 1895.
- Laisant, G.-A.** (Paris). [Vedi t. VIII, p. 5]. Note sur les invariants des polynômes entiers. *Rend. Circ. Matem.*, VIII, 1894.
- Laurent, H.** (Paris). Traité d'Algèbre. Compléments. Quatrième Partie: Théorie des polynômes à plusieurs variables. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1894.
- Lemoine, E.** (Paris). [Vedi t. VIII, p. 6]. Nuevo medio de obtener fórmulas en la Geometría del triángulo. *El Progreso Mat.*, Año IV, 1894.
- Notes de Géométrie. *Association Française. Congrès de Besançon*, 1893.
- Compléments de Géométriegraphie. *Ibid.*, 1893.
- Application au tétraèdre de la transformation continue. *Ibid.*, 1893.
- Longchamps, G. de** (Paris). [Vedi t. VIII, p. 6]. Sur un trisectionnaire. *Association Française. Congrès de Besançon*, 1893.
- L'Arithmétique avec les figures négatives. *Ibid.*, 1893.
- L'espace infinitésimal autour d'un point d'inflection. *Ibid.*, 1893.
- Un théorème sur la géométrie des masses. *Ibid.*, 1893.
- Note sur les travaux scientifiques de M. G. de Longchamps. Paris, Imprimerie Chaix, 1894.

- Lamé, E. *Ved. a VII, p. 4*. Recensione dell'opera di Lame, *Sur les fonctions elliptiques et leurs applications à la physique et à l'analyse*, Paris 1837. L'opera si compone di due volumi. Il primo tratta delle funzioni ellittiche e le loro applicazioni alla fisica e all'analisi; il secondo tratta delle funzioni ellittiche e le loro applicazioni alla meccanica. L'autore è un grande matematico del XIX secolo. L'opera è stata tradotta in tedesco da Sommer-Tüllens ed è uscita nel 1860.
- Machado, E. S. Scritto su un rapporto presentato dallo stesso autore al suo consorzio di un giorno prima. *Ved. a VIII, p. 1*.
- Machado, A. *Angra, Brazil*. *Ved. a VII, p. 4*. *On the Application of the methods of Analysis generally to Space Curves*. 1834.
- *On the Definitions of the Integrations of Planar Curves*. 1835.
  - *On the Analytical Treatment of Alternating Currents*. 1836. 1837.
- Masani, U. (Napoli). *Ved. a VII, p. 1*. Scritti scientifici e sull'industria napoletana. *Atti dei Congressi*, 4 marzo 1834.
- Mattina, G. (Palermo). *Ved. a VII, p. 1*. Scritti sulla geodetica palermitana. 1834.
- Menabrea, L. F. (Chambéry). *Ved. a II, p. 10*. Speciale sui dati + l'effetto delle armi da fuoco eseguite a Metz nel 1830. *Il Saggiatore* maggio 1836.
- Discours sur la vie et les ouvrages de Chevalier Georges Bidaut. *Mém. Acc. di Torino*, IV,, 1841.
  - Mémoire sur les quadratures. *Ibid.*, VIII,, 1844.
  - Études sur la série de Lagrange. Turin, Imprimerie Romana 1845.
  - Discours prononcé par le député Menabrea dans la séance du 21 mars 1854.
  - Sopra una teoria analitica dalla quale si deducono le leggi generali di vari ordini di fenomeni che dipendono da equazioni differenziali lineari tra i quali quelli delle vibrazioni e della propagazione del calore nel corpo solido. *Ann. di Sc. Mat. e Fis.*, settembre 1855.
  - Rapport de la Commission technique Internationale convoquée à Paris pour l'examen des questions relatives à l'amélioration des bouchées du Rhône. Paris, Impr. Impériale 1858.
  - Nouveau Principe sur la Distribution des tensions dans les systèmes statiques. *Comptes Rendus*, XLVI, 31 mai 1858.
  - Note sur le percement des Alpes entre Modane et Bardonechha. *Comptes Rendus*, XLVI, 21 juin 1858.
  - Note sur les effets du choc de l'eau dans les conduites. *Comptes Rendus*, XLVII, 2 août 1858.
  - Interpellanza del Senatore Menabrea al Ministro della Marina. *Atti del Senato*, 11 luglio 1862.
  - Il Genio nella Campagna d'Ancona e della Bassa Italia (1861-62). *Taranto e Atlante*. Torino, G. Favale, 1864.
  - Relazione dell'Ufficio Centrale sul progetto di legge relativo alla opinione

- straordinaria di L. 79,700,000 per lavori di difesa dello Stato. *Senato del Regno*, 1873-74.
- Niewenglowski, B.** (Paris). *Cours de Géométrie analytique à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques spéciales et des Candidats aux Écoles du Gouvernement*. Tome I: Sections Coniques. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1894.
- Ocagne, M. d'** (Paris). [Vedi t. VIII, p. 8]. Sur la composition des lois d'erreurs de situation d'un point. *Comptes Rendus*, CXV, 5 mars 1894.
- Pennacchietti, G.** (Catania). [Vedi t. VIII, p. 8]. Sull'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili. *Rend. Circ. Matem.*, IX, 1895.
- Picard, E.** (Paris). [Vedi t. VIII, p. 8]. A propos de quelques récents travaux mathématiques.—Sur la théorie des surfaces algébriques, *Rend. Circ. Matem.*, IX, 1895.
- Pieri, M.** (Torino). [Vedi t. VIII, p. 8]. Per trovare i raggi di massima e minima curvatura nelle superficie quadriche. *El Progreso Matem.*, IV, 1894.  
— Trasformazione d'ogni curva algebrica in altra priva di punti multipli. *Rivista di Matem.*, 1894.  
— Teoremi da dimostrare. *Giorn. di Battaglini*, XXXI, 1893.
- Pinto, L.** (Napoli). [Vedi t. VII, p. 7]. L'Elettricità modo di movimento dello stesso etere luminoso e calorifico. *Atti Acc. Pontaniana*, 15 aprile 1894.  
— «Giuseppe Battaglini». Parole lette dal Socio Segretario L. Pinto. *Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli*, 5 maggio 1894.
- Porro, F.** (Torino). [Vedi t. VIII, p. 8]. Astronomia sferica elementarmente esposta. Roma, Soc. Dante Alighieri, 1894.
- Reina, V.** (Roma). [Vedi t. VIII, p. 9]. Azimut assoluto di Monte Cavo sull'orizzonte della Specola Geodetica di S. Pietro in Vincoli, in Roma. *R. Commissione Geodetica Italiana*. Padova, 1894.  
— Sulla lunghezza del pendolo semplice a secondi in Roma. Esperienze eseguite dai prof. G. Pisati ed E. Pucci. *Mem. R. Acc. Lincei*, I<sub>5</sub>, 4 dicembre 1892.
- Riccardi, P.** (Modena). Intorno ad alcune edizioni dell'«Algorismus» del Sacro Bosco. *Bibliotheca Math.*, 1894.
- Ricci, G.** (Padova). [Vedi t. III, p. 40]. Della equazione di condizione pei parametri dei sistemi di superficie che appartengono ad un sistema triplo ortogonale. *Rend. Acc. Lincei*, III<sub>5</sub>, 1894.
- Riccob, A.** (Catania). Sulla percezione più rapida delle stelle più luminose. *Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani*, XXII, 1893.  
— Sui movimenti microsismici. *Ibid.*, XXII, 1893.  
— Osservazioni astrofisiche solari eseguite nel R. Osservatorio di Catania—Statistica delle macchie solari nell'anno 1892. *Ibid.*, XXII, 1893.  
— Sulla relazione fra le perturbazioni magnetiche e le macchie solari. *Ibid.*, XXIII, 1894.

- La lava incandescente nel cratere centrale dell'Etna e fenomeni geodinamici concomitanti. *Annali dell'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica*, XV, 1893.
- Velocità di propagazione delle principali scosse del terremoto di Zante a Catania. *Rend. Acc. Lincei*, 4 marzo 1894.
- Riccò, A. e Sajja, G.** Osservazioni termometriche eseguite nel R. Osservatorio Etneo. *Boll. Acc. Gioenia di Catania*, 25 febbrajo 1894.
- Riccò A. e Tringali, E.** Sulla temperatura del suolo. *Ibid.*, 26 novembre 1893 e 14 gennaio 1894.
- Ruffini, F. P.** (Bologna). [Vedi t. VIII, p. 9]. Delle pedali delle parabole cubiche divergenti. *Mem. Acc. Sc. di Bologna*, V<sub>5</sub>, 25 novembre 1894.
- Schrader, A.** (Eversen). Geometrische Untersuchung der Geschwindigkeits-Kegel und der Oberflächen gleichen Gangunterschiedes optisch doppeltbrechender Krystalle. Inaugural-Dissertation. Münster, 1892.
- Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Roma.** Annuario per l'anno scolastico 1894-95.
- Siacci, F.** (Napoli). Sulle tensioni in un sistema elastico articolato. Nota I. Nota II. *Rend. Acc. Lincei*, III<sub>5</sub>, 1894.
- Soler, E.** (Palermo). [Vedi t. VIII, p. 9]. Sopra una certa deformata della sfera. *Rend. Circ. Matem.*, VIII, 1894.
- Somigliana, C.** (Pavia). Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali. *Annali di Matem.*, XXII, 1894.
  - Sulla legge di razionalità rispetto alle proprietà elastiche dei cristalli. *Rend. Acc. Lincei*, III<sub>5</sub>, 4 marzo 1894.
  - Sopra gli invarianti ortogonali di deformazione. *Ibid.*, IV<sub>5</sub>, 6 gennaio 1895.
  - Sopra gli integrali delle equazioni della isotropia elastica. *Nuovo Cimento*, XXXVI, 1894.
- Stegemann, M.** [Vedi t. VIII, p. 9]. Grundriss der Differential - und Integral-Rechnung. II. Theil: Integral-Rechnung. Hannover, 1894.
- Stecloff, B. A.** (Kharkow). Sur le mouvement d'un corps solide dans le liquide. *Annales de l'Univ. de Kharkow*, 1893.
- Studnička, F. J.** (Praga). O Kvaternionech. V. Praze, 1894.
- Sturm, R.** (Breslau). [Vedi t. VIII, p. 9]. Ueber den allgemeinen Complex zweiten Grades. *Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. zu Berlin*, 12 Juli 1894.
- Torelli, G.** (Palermo). [Vedi t. VIII, p. 10]. Sul gruppo monomio individuato da una trasformazione infinitesimale proiettiva. *Rend. Circ. Matem.*, VIII, 1894.
  - Sulle equazioni finite del gruppo monomio individuato da una trasformazione infinitesimale proiettiva. *Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Matem. Napoli*, 12 maggio 1894.
  - Giuseppe Battaglini. *Rend. Circ. Matem.*, VIII, 1894.
- Université de Kasan.** Pour le centième anniversaire de la naissance de N. I. Lobatcheffsky. Kasan, 1894.

**University of Chicago** (Founded by John D. Rockefeller). Programme  
of the Departments of Mathematics and Astronomy. 1894-95.

**Vivanti, G.** (Pavia). [Vedi t. VIII, p. 10]. Teoria degli Aggregati. Parte VI  
del Formulario. *Rivista Matem.*, 1894.

— Ueber Potenzreihen zweier Veränderlichen. *Monatshefte f. Math. u. Phys.*,  
V, 1894.

— Preliminari per lo studio delle funzioni di due variabili. *Rend. Circ. Matem.*,  
IX, 1895.

**Vries, J. de** (Delft). [Vedi t. VIII, p. 10]. Ueber mehrstufige Involutionen in  
der Complexen Ebene. *Ibid.*, V, 1894.

— Zur Theorie der Tripelsysteme. *Rend. Circ. Matem.*, VIII, 1894.

F. G.

---

# REPERTORIO BIBLIOGRAFICO DELLE SCIENZE MATEMATICHE IN ITALIA. *(Continuazione, vedi t. VIII, pp. 11-164).*

---

## R. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI. (1840-1889) (\*).

### ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI ED ABBREVIATURE.

*A. I. V.* = Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia (\*\*).

SERIE I, TOMI: I-VII (1840-1847); in-8°.

SERIE II, TOMI: I-V (1850-1853); in-8°.

SERIE III, TOMI: I-XVI (1854-1871); in-8°.

SERIE IV, TOMI: I-III (1871-1874); in-8°.

SERIE V, TOMI: I-VIII (1874-1882); in-8°.

SERIE VI, TOMI: I-VII (1882-1890); in-8°.

*M. I. V.* = Memorie del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia.

VOLUMI: I-XXII (1843-1887); in-4°.

s. = Serie; t. = Tomo. v. = Volume; pp. = pagine.

---

### 1492. A 3.

MINICH (Serafino Raffaele). Notizie sulle indagini intraprese e proseguitate dal professore S. R. Minich intorno alla risolubilità generale delle equazioni algebriche, ecc. [*A. I. V.*, s. V, t. VII, pp. 905-919 (1880-81)].

### 1493. A 3.

MINICH (Serafino Raffaele). Sulle equazioni di quinto grado. [*A. I. V.*, s. V., t. VIII, pp. 307-323, 893-908 (1881-82)].

### 1494. A 3 b

MINICH (Serafino Raffaele). Sopra un modo di dedurre il progressivo sviluppo della equazione a' quadrati delle differenze. [*A. I. V.*, s. III, t. IV, pp. 343-374 (1858-59)].

### 1495. A 3 d, A 3 e.

BELLAVITIS (Giusto). Sul più facile modo di trovare le radici reali delle equa-

(\*) Il lavoro di spoglio e di classificazione delle pubblicazioni del R. Istituto Veneto è dovuto al prof. C. Somigliana.

(\*\*) I tomni delle prime tre serie portano il titolo: « Atti delle Adunanze dell'I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ».

zioni algebriche, e sopra un nuovo metodo per la determinazione delle radici immaginarie. [M. I. V., v. III, pp. 109-219 (1847)].

**1496. A 3 d, A 3 e.**

BELLAVITIS (Giusto). Sulla risoluzione numerica delle equazioni. [M. I. V., v. VI, pp. 357-413 (1856)].

**1497. A 3 d.**

BELLAVITIS (Giusto). Appendice alle Memorie sulla risoluzione numerica delle equazioni, inserite nei vol. 3<sup>o</sup>, 4<sup>o</sup>, 6<sup>o</sup>, ... [M. I. V., v. IX, pp. 177-236 (1860)].

**1498. A 3 d.**

MINICH (Serafino Raffaele). Di un modo di arguire da principi già noti il teorema di Newton sul più piccolo numero delle radici immaginarie d'ogni equazione algebrica. [A. I. V., s. III, t. XI, pp. 127-136 (1865-66)].

**1499. A 3 d.**

MINICH (Serafino Raffaele). Sopra altre regole analoghe a quella del Newton, che possono esibire un limite inferiore al numero delle radici immaginarie di un'equazione algebrica. [A. I. V., s. III, t. XI, pp. 211-223, 309-317 (1865-66)].

**1500. A 3 d.**

TURAZZA (Domenico). Del teorema di Sylvester. [A. I. V., s. III, t. XI, pp. 419-428 (1865-66)].

**1501. A 3 e.**

BELLAVITIS (Giusto). Determinazione numerica delle radici immaginarie delle equazioni algebriche. [M. I. V., v. XI, pp. 461-493 (1862)].

**A 3 e** (Vedi n° 1495, 1496).

**1502. A 3 k, V 2.**

MINICH (Serafino Raffaele). Sulle teorie di Lagrange e di Vandermonde spettanti alla risoluzione generale delle equazioni algebriche e sulla risoluzione delle equazioni di quarto grado per radici esteriori quarte. [A. I. V., s. III, t. IV, pp. 19-38 (1858-59)].

**1503. A 4.**

MINICH (Serafino Raffaele). Sulla risolubilità delle equazioni algebriche. [A. I. V., s. III, t. III, pp. 629-636 (1856-57)].

**1504. A 4.**

BELLAVITIS (Giusto). Sulla risoluzione algebrica delle equazioni. [A. I. V., s. III, t. IV, pp. 55-61 (1858-59)].

**1505. A 5 b.**

MINICH (Serafino Raffaele). Sopra una forma d'interpolazione del Prony. [A. I. V., s. III, t. XII, pp. 1153-1160 (1867-68)].

1506. **B 1.**

BELLAVITIS (Giusto). Sposizione elementare della teorica dei determinanti. [M. I. V., v. VII, pp. 67-144 (1857)].

1507. **B 1, B 3 a.**

GARBIERI (Giovanni). Sopra alcune classi di funzioni simmetriche. [A. I. V., s. VI, t. I, pp. 33-74 (1882-83)].

1508. **B 4 a.**

BELLAVITIS (Giusto). Cenni elementari sui discriminanti invarianti e covarianti. [A. I. V., s. III, t. IV, pp. 65-80, 83-90 (1858-59)].

1509. **B 12.**

BELLAVITIS (Giusto). Saggio sull'algebra degli immaginari. [M. I. V., v. IV, pp. 243-344 (1852)].

1510. **B 12 b.**

BELLAVITIS (Giusto). Sulle origini del metodo delle equipollenze. [M. I. V., v. XIX, pp. 449-491 (1876)].

**B 12 b.** (*Vedi* n° 1533).

1511. **C 2 g.**

BELLAVITIS (Giusto). Sul calcolo approssimato degli integrali d'ordine superiore. [M. I. V., v. VI, pp. 91-110 (1856)].

1512. **C 2 g.**

MINICH (Serafino Raffaele). Sopra due nuove formole onde integrare le funzioni di ordine qualunque a più variabili indipendenti. [M. I. V., v. VI, pp. 473-509 (1856)].

1513. **C 2 j.**

TURAZZA (Domenico). Intorno all'uso dei compartimenti diseguali nella ricerca del valore numerico di un dato integrale. [M. I. V., v. V, pp. 277-279 (1885)].

1514. **C 2 j, U.**

SANTINI (Giovanni). Delle interpolazioni e quadrature meccaniche per gli usi astronomici. [M. I. V., v. XIII, pp. 177-231 (1866)].

1515. **D 1 a.**

FAMBRI (Paulo). Nota sulle funzioni continue, le quali in un dato intervallo non ammettono derivate. [A. I. V., s. VI, t. III, pp. 823-831 (1884-85)].

1516. **D 3 c γ.**

BASSANI (A.). Generalizzazione della formula di Lagrange. [A. I. V., s. VI, t. V, pp. 1163-1170 (1886-87)].

**F 8 g.** (*Vedi* n° 1548).

**1517. G 1 a.**

MAINARDI (Gaspare). Sulla integrazione della formola  $\frac{F}{E \sqrt[3]{\Psi}}$  essendo  $F, E$  funzioni intere di una medesima variabile. [*M. I. V.*, v. II, pp. 401-44 (1845)].

**1518. G 3 f.**

MINICH (Serafino Raffaele). Sopra alcune nuove proposizioni relative alle trascendenti Abeliane. [*A. I. V.*, s. I, t. VI, pp. 130-135 (1847)].

**1519. G 3 f.**

MINICH (Serafino Raffaele). Sugli integrali algebrici di un sistema di equazioni differenziali, i cui termini sono integrabili per mezzo di trascendenti abeliane, e sulla proprietà fondamentale di simili trascendenti. [*M. I. V.*, v. III, pp. 269-328 (1847)].

**1520. H 4.**

MINICH (Serafino). Sulla espressione dell'integrale completo d'ogni equazione lineare a due variabili per mezzo degli integrali particolari della stessa equazione col secondo membro ridotto a zero. [*M. I. V.*, v. V, pp. 43-18; (1855)].

**1521. H 6 a.**

MINICH (Serafino Raffaele). Sulle caratteristiche generatrici delle superficie curve; e sulla teoria delle equazioni a derivate parziali. [*M. I. V.*, v. XXII, pp. 169-230 (1884)].

**1522. H 7.**

GARBIERI (Giovanni). Sopra le equazioni alle derivate parziali. [*A. I. V.*, s. VI, t. I, pp. 1173-1225 (1882-83)].

**1523. H 7.**

GARBIERI (Giovanni). Sulla eliminazione delle funzioni arbitrarie. [*A. I. V.*, s. VI, t. V, pp. 831-841 (1886-87)].

**1524. H 10 d α.**

RICCI (Gregorio). Nota sulla integrazione della equazione  $\Delta_2 U = f$ . [*A. I. V.*, s. VI, t. III, pp. 1439-1444 (1884-85)].

**1525. I 7.**

CAZZANIGA (Pietro). Sui residui di ordine qualunque rispetto ai moduli primi. [*A. I. V.*, s. VI, t. IV, pp. 1271-1279 (1885-86)].

**1526. J 1 a γ.**

BELLAVITIS (Giusto). Nota sul gioco americano del 15, ecc. [*A. I. V.*, s. V, t. VI, pp. 901-904 (1879-80)].

1527. **J 1 c, Q 2.**

VERONESE (Giuseppe). Dimostrazione di una formola matematica di una serie comprendente le formole di Kantor. [A. I. V., s. VI, t. II, pp. 137-143 (1883-84)].

1528. **J 2 a.**

BELLAVITIS (Giusto). Considerazioni sulla teoria della probabilità. [A. I. V., s. III, t. II, pp. 299-319 (1856-57)].

1529. **J 2 b.**

GRANDI (Agostino). Dimostrazione di un teorema della teoria dei numeri. [A. I. V., s. VI, t. I, pp. 809-812 (1882-83)].

1530. **J 2 d.**

MESSEDAGLIA (Angelo). Studi sulla popolazione. [M. I. V., v. XII, pp. 505-594 (1864)].

1531. **J 2 e.**

SANTINI (Giovanni). Compendiata esposizione del modo più vantaggioso di risolvere una serie di equazioni lineari, risultanti da osservazioni tutte egualmente probabili per la determinazione degli elementi di una proposta teorica. [M. I. V., v. XIV, pp. 477-510 (1868)].

1532. **J 2 e.**

BELLATI (Manfredo). Intorno a un modo di semplificare in alcuni casi l'applicazione del metodo dei minimi quadrati al calcolo delle costanti empiriche. [A. I. V., s. V, t. I, pp. 849-863 (1874-75)].

**J 2 g.** (*Vedi* n° 1639).

1533. **K, B 12 b.**

BELLAVITIS (Giusto). Soluzioni grafiche di problemi geometrici del primo e del secondo grado trovate col metodo delle equipollenze. [M. I. V., v. I, pp. 225-267 (1843)].

1534. **K, L<sup>1</sup>.**

BELLAVITIS (Giusto). Note intorno ad alcune questioni di matematica pura elementare. [A. I. V., s. III, t. VI, pp. 165-208 (1860-61)].

1535. **K 9 a α, B 12 b.**

BELLAVITIS (Giusto). Dimostrazione col metodo delle equipollenze di alcuni teoremi in parte considerati dai sig. Bellati e Ridolfi. [A. I. V., s. I, t. VI, pp. 53-59 (1847)].

1536. **K 14 b.**

MINICH (Serafino Raffaele). Di alcuni teoremi spettanti agli angoli solidi dei corpi piano-superficiali. [A. I. V., s. III, t. VII, pp. 824-849 (1861-62)].

**K 14 b.** (*Vedi* n° 1635).1537. **K 20 f. U.**

LORENZONI (Giuseppe). Sulle formole fondamentali della trigonometria sferica e su quelle che servono pel calcolo della parallasse nelle coordinate di un astro. [*A. I. V.*, s. V, t. III, pp. 1053-1069 (1876-77)].

1538. **K 23.**

CASSANI (Pietro). La proiezione stereoscopica. [*A. I. V.*, s. VI, t. III, pp. 1835-1848 (1884-85)].

**L<sup>1</sup>.** (*Vedi* n° 1534).1539. **L<sup>1</sup> 1 c.**

LAZZERI (Giulio). Nuovi teoremi sull'esagono di Pascal. [*A. I. V.*, s. VI, t. III, pp. 481-500 (1884-85)].

1540. **L<sup>1</sup> 2 a.**

CASSANI (Pietro). Intorno all'uso del sistema polo-tangenziale in alcune questioni di geometria analitica. [*A. I. V.*, s. IV, t. III, pp. 2067-2074 (1873-74)].

1541. **L<sup>1</sup> 2 a.**

REGGIO (Zaccaria). Sulla determinazione del polo di una retta data. [*A. I. V.*, s. V, t. VII, pp. 1117-1120 (1880-81)].

1542. **L<sup>1</sup> 9 d.**

CAMUS (Giulio). Ricerca geometrica della lunghezza di un arco di ellisse. [*A. I. V.*, s. VI, t. I, pp. 997-1003 (1882-83)].

1543. **L<sup>1</sup> 17 e.**

REGGIO (Zaccaria). Alcune ricerche sulle coniche. [*A. I. V.*, s. V, t. VIII, pp. 649-672 (1881-82)].

1544. **L<sup>1</sup> 18 c.**

CASSANI (Pietro). Ricerche sulla Involuzione Quadratica. [*A. I. V.*, s. III, t. XVI, pp. 535-554 (1870-71)].

1545. **L<sup>2</sup> 1 a.**

BORDIGA (Giovanni Alfredo). Alcuni teoremi sulle quadriche analoghi a quello di Pascal sulle coniche. [*A. I. V.*, s. V, t. VII, pp. 1253-1259 (1880-81)].

1546. **L<sup>2</sup> 11 d.**

MAGGI (Pietro). Sopra una proprietà delle linee di curvatura principale delle superficie. [*A. I. V.*, s. II, t. I, pp. 64-66 (1850)].

1547. **M<sup>1</sup> 1.**

BELLAVITIS (Giusto). Relazioni di allineamento nei punti delle curve algebriche. [*M. I. V.*, v. VIII, pp. 161-179 (1859)].

1548. **M<sup>1</sup> 5 e, F 8 g.**

D'ARCAIS (Francesco). Sopra alcuni teoremi sulle curve piane del terzo ordine.  
[A. I. V., s. V, t. VIII, pp. 673-682 (1881-82)].

1549. **M<sup>2</sup> 1 e.**

GARBIERI (Giovanni). Sui fasci e sulle schiere di superficie. [A. I. V., s. VI,  
t. IV, pp. 943-994 (1885-86)].

1550. **M<sup>2</sup> 1 e.**

GARBIERI (Giovanni). Sulle superficie polari covarianti e sui loro invarianti si-  
multanei. [A. I. V., s. VI, t. IV, pp. 1149-1199 (1885-86)].

1551. **M<sup>2</sup> 3 b.**

LAZZERI (Giulio). Le curve e le sviluppabili multiple di una classe di superficie  
algebriche. [A. I. V., s. VI, t. VI, pp. 171-188 (1887-88)].

1552. **M<sup>2</sup> 4 e.**

VERONESE (Giuseppe). Di una costruzione della superficie del 4<sup>o</sup> ordine dotata  
di conica doppia. [A. I. V., s. VI, t. II, pp. 1841-1842 (1883-84)].

1553. **M<sup>2</sup> 5 d, Q 2.**

BORDIGA (Giovanni Alfredo). Intorno ad alcune superficie del 5<sup>o</sup> e del 6<sup>o</sup> or-  
dine, che si deducono dallo spazio a sei dimensioni. [A. I. V., s. VI, t. IV,  
pp. 1461-1501 (1885-86)].

1554. **M<sup>2</sup> 6 b a.**

MURER (Vittorio). Sulla superficie di 5<sup>o</sup> ordine dotata di quartica doppia di  
1<sup>a</sup> specie. [A. I. V., s. VI, t. V, pp. 1223-1227 (1886-87)].

1555. **M<sup>2</sup> 8, Q 2.**

BORDIGA (Giovanni Alfredo). Rappresentazione piana della superficie rigata  
normale. [A. I. V., s. VI, t. IV, pp. 1085-1092 (1885-86)].

1556. **M<sup>2</sup> 9.**

BORDIGA (Giovanni). Di una certa superficie del 7<sup>o</sup> ordine. [A. I. V., s. VI,  
t. V, pp. 1397-1403 (1886-87)].

1557. **M<sup>3</sup> 4 a, Q 2.**

CASTELNUOVO (Guido). Studio dell'involtione generale sulle curve razionali  
mediante la loro curva normale dello spazio a n dimensioni. [A. I. V., s. VI,  
t. IV, pp. 1167-1199 (1885-86)].

1558. **M<sup>3</sup> 6, Q 2.**

BORDIGA (Giovanni Alfredo). Studio generale della quartica normale. [A. I. V.,  
s. VI, t. IV, pp. 503-525 (1885-86)].

1559. **M<sup>3</sup> 6 a.**

BRAMBILLA (Alberto). Ricerche analitiche intorno alle curve gobbe razionali  
del 4<sup>o</sup> ordine. [A. I. V., s. VI, t. III, pp. 1471-1489 (1884-85)].

1560. N<sup>o</sup> 2.

BORDIGA (Giovanni Alfredo). Complessi e sistemi lineari di raggi sugli spaziori. — Curve normali che essi generano. [A. I. V., s. VI, t. I, pp. 163-189 (1885-86)].

1561. N<sup>o</sup> 1.

BORDIGA (Giovanni). Dei complessi in generale nello spazio a 4 dimensioni ed in particolare di alcuni di primo ordine; loro proiezione e rappresentazione nello spazio ordinario. [A. I. V., s. VI, t. VI, pp. 919-962 (1887-88)].

1562. N<sup>o</sup> 1 a.

D'EMILIO (Raffaele). Le superficie rigate di una congruenza lineare. [A. I. V., s. VI, t. III, pp. 1265-1275 (1884-85)].

1563. N<sup>o</sup> 1 g.

CASTELNUOVO (Guido). Sopra una congruenza del 3<sup>o</sup> ordine e 6<sup>a</sup> classe dello spazio a 4 dimensioni e sulle proiezioni nello spazio ordinario. [A. I. V., s. VI, t. V, pp. 1249-1281 (1886-87); s. VI, t. VI, pp. 525-579 (1886-87)].

## 1564. O 2 a.

REGGIO (Zaccaria). Quadratura di certe aree circolari. [A. I. V., s. V, t. VII, pp. 1097-1116 (1880-81)].

## 1565. O 2 i.

MINICH (Serafino Raffaele). Sulle coniche osculatrici delle curve piane, e sopra un problema della geometria di posizione del Carnot. [M. I. V., v. VI, pp. 111-196 (1856)].

## 1566. O 5 i.

LORENZONI (Giuseppe). Dimostrazione della equazione di Clairaut indipendente dalla proprietà della linea geodetica di essere la brevissima. [A. I. V., s. V, t. II, pp. 591-597 (1875-76)].

## 1567. O 6 j.

GARBIERI (Giovanni). Sulle superficie involuppi. [A. I. V., s. VI, t. II, pp. 1201-1219 (1883-84)].

## 1568. P 1.

CASTELNUOVO (Guido). Studio sulla omografia di seconda specie. [A. I. V., s. VI, t. V, pp. 1041-1115 (1886-87)].

## 1569. P 1 a.

FAVARO (Antonio). Intorno alla costruzione delle punteggiate proiettive simili. [A. I. V., s. IV, t. III, pp. 1024-1031 (1873-74)].

## 1570. P 4 g.

MONTESANO (Domenico). Di alcuni gruppi chiusi di trasformazioni involutorie nel piano e nello spazio. [A. I. V., s. VI, t. VI, pp. 1425-1444 (1887-88)].

1571. **P 6 a.**

LAZZERI (Giulio). La rappresentazione dello spazio rigato sopra un piano connesso e sua applicazione allo studio dei connessi lineo-lineari. [A. I. V., s. VI, t. III, pp. 247-268, 437-474 (1884-85)].

1572. **Q 2.**

VERONESE (Giuseppe). Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni. [A. I. V., s. V, t. VIII, pp. 987-1024 (1881-82)].

1573. **Q 2.**

CASTELNUOVO (Guido). Angoli di due spazi contenuti nello spazio a  $n$  dimensioni. [A. I. V., s. VI, t. III, pp. 1331-1348 (1884-85)].

1574. **Q 2.**

BORDIGA (Giovanni Alfredo). Corrispondenza di polarità negli spazi superiori. [A. I. V., s. VI, t. III, pp. 2097-2105 (1884-85)].

1575. **Q 2.**

CASSANI (Pietro). Ricerche geometriche negli spazi superiori. [A. I. V., s. VI, t. IV, pp. 227-241 (1885-86)].

**Q 2.** (Vedi n° 1527, 1553, 1555, 1557, 1558, 1560).

1576. **R 1 b.**

BELLAVITIS (Giusto). Applicazione della cinematica alla curvatura di tutte le traiettorie descritte dai punti di un sistema piano invariabile. [A. I. V., s. III, t. IV, pp. 991-1001 (1858-59)].

1577. **R 1 c.**

MINICH (Serafino Raffaele). Alcune considerazioni sul moto progressivo e rotatorio dei solidi liberi. [A. I. V., s. I, t. III, pp. 321-341 (1844)].

1578. **R 1 c.**

MINICH (Serafino Raffaele). Sui raggi osculatori delle curve descritte da vari punti d'un sistema invariabile, che si muove con moto continuo intorno ad un punto fisso. [A. I. V., s. III, t. V, pp. 183-195 (1859-60)].

1579. **R 1 c.**

BELLAVITIS (Giusto). Esposizione di una facile costruzione geometrica della soluzione del problema di determinare i poli dei circoli osculatori delle curve descritte dai punti di una sfera che si muove intorno al proprio centro. [A. I. V., s. III, t. V, pp. 195-196 (1859-60)].

1580. **R 1 c.**

BELLAVITIS (Giusto). Sul movimento istantaneo intorno ad un punto. [A. I. V., s. III, t. V, pp. 519-524 (1859-60)].

*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 2<sup>a</sup>.—Stampato il 5 giugno 1895.

## 1581. R 1 c.

TURAZZA (Domenico). Intorno ad un nuovo teorema relativo alla rotazione di un sistema rigido ad un asse. [A. I. V., s. III, t. X, pp. 1403-1404 (1864-65)].

## 1582. R 1 c.

TURAZZA (Domenico). Di alcune proprietà degli assi di rotazione. [A. I. V., s. VI, t. VII, pp. 1221-1233 (1888-89)].

## 1583. R 4 a.

CONTI (Carlo). Considerazioni sulle forze e sui momenti. [A. I. V., s. I, t. III, pp. 12-41 (1844)].

## 1584. R 4 a.

TURAZZA (Domenico). Dei sistemi di forze formati con due forze soltanto, i quali sono equipollenti ad un sistema qualunque di forze agenti sovra punti invariabilmente congiunti fra loro. [M. I. V., v. XV, pp. 461-481 (1870)].

## 1585. R 4 a.

TURAZZA (Domenico). Dei sistemi di rette coniugate, così che lungo le stesse si possa far agire un sistema di forze equipollente ad un sistema qualunque di forze date. [M. I. V., v. XVIII, pp. 467-481 (1874)].

## 1586. R 4 a.

PADOVA (Ernesto). Intorno agli assi statici nei sistemi di forma invariabile. [A. I. V., s. VI, t. I, pp. 1243-1250 (1882-83)].

## 1587. R 4 a.

D'EMILIO (Raffaello). Gli assoidi nella statica e nella Cinematica. [A. I. V., s. VI, t. III, pp. 1135-1154 (1884-85)].

## 1588. R 4 b.

FAVARO (Antonio). Sulla teoria dei poligoni funicolari secondo Lamé e Clapéron nei suoi rapporti coi metodi della statica grafica. [A. I. V., s. V, t. III, pp. 1319-1344 (1876-77)].

## 1589. R 4 c.

TURAZZA (Domenico). Introduzione ad un Corso di Statica dei sistemi variabili. [A. I. V., s. VI, t. VI, pp. 701-723 (1887-88)].

## 1590. R 4 d.

FAVARO (Antonio). Sopra alcuni esercizi di statica grafica proposti dal professore H. Zeuthen. [A. I. V., s. V, t. V, pp. 719-748 (1878-79)].

## 1591. R 7 g α.

ARCARI (Giovanni). Teoria del pendolo di Foucault. [A. I. V., s. III, t. VII, pp. 820-822 (1861-62)].

## 1592. R 8.

CONTI (Carlo). Soluzioni di alcuni problemi relativi al movimento dei corpi sottoposti a forza centrifuga. [M. I. V., v. I, pp. 187-224 (1843)].

## 1593. R 8.

PADOVA (Ernesto). Un teorema di meccanica. [A. I. V., s. VI, t. I, pp. 913-917 (1882-83)].

## 1594. R 8 a.

TURAZZA (Domenico). Di alcune proprietà relative agli assi di rotazione di un sistema rigido. [M. I. V., v. XI, pp. 383-404 (1862)].

## 1595. R 8 a.

TURAZZA (Domenico). Intorno agli assi principali ed agli assi permanenti in un sistema rigido qualunque. [M. I. V., v. XII, pp. 411-446 (1864)].

## 1596. R 8 c.

LORENZONI (Giuseppe). Sulla deviazione dal piede della verticale di un grave liberamente caduto dalla superficie della terra sul fondo di una cava. [A. I. V., s. VI, t. VII, pp. 759-784 (1888-89)].

## 1597. R 8 c α.

TURAZZA (Domenico). Del moto di un corpo rotondo pesante fisso ad un punto del suo asse di figura, oppure giacente sopra un piano. [M. I. V., v. XI, pp. 75-91, 375-382 (1862)].

## 1598. R 8 d.

CAPPELLETTO (Antonio Alippo). Del pendolo conico. [M. I. V., v. XVII, pp. 515-527 (1872)].

## 1599. R 8 d.

LORENZONI (Giuseppe). Sulla equazione differenziale del moto di un pendolo fisico, il cui asse di sospensione muovesi rimanendo parallelo a sé stesso. [A. I. V., s. VI, t. V, pp. 331-375 (1886-87)].

## R 8 e. (Vedi n° 1629).

## 1600. R 8 f α.

PADOVA (Ernesto). Sugli integrali comuni a più problemi di dinamica. [A. I. V., s. VI, t. I, pp. 1005-1020 (1882-83)].

## 1601. R 8 i.

ARCARI (Giovanni). Teoria del pendolo di Foucault. [A. I. V., s. III, t. VII, pp. 820-821 (1861-62)].

## 1602. R 9 a.

BELLAVITIS (Giusto). Alcune considerazioni sugli effetti dell'attrito e sul modo di calcolarli. [M. I. V., v. IV, pp. 213-241 (1852)].

## 1603. R 9 d.

MINICH (Serafino Raffaele). Teorema generale concernente gli ingranaggi conici. [A. I. V., s. III, t. V, pp. 506-518 (1859-60)].

## 1604. S 2 d.

TURAZZA (Domenico). Dell'efflusso dei liquidi dai vasi di rivoluzione. [M. I. V., v. II, pp. 93-130 (1845)].

## 1605. S 2 d.

BELLAVITIS (Giusto). Sul movimento di un liquido che discende in modo perfettamente simmetrico rispetto ad un asse verticale. [M. I. V., v. II, pp. 339-360 (1845)].

## 1606. S 3.

TURAZZA (Domenico). Considerazioni intorno alcuni obbietti mossi alle soluzioni de' problemi d'Idraulica. [A. I. V., s. I, t. III, pp. 348-360 (1844)].

## 1607. S 3 b.

TURAZZA (Domenico). Nuova determinazione delle costanti relative alla resistenza d'attrito nel movimento dell'acqua pe' lunghi tubi di condotta e per gli alvei. [M. I. V., v. III, pp. 75-108 (1847)].

## 1608. S 3 b.

BERNARDI (Enrico). Sopra un curioso problema di idrodinamica pratica. [A. I. V., s. VI, t. VI, pp. 1309-1348 (1887-88)].

1609. S 3 b  $\alpha$ .

TURAZZA (Domenico). Intorno alle leggi del moto dell'acqua nei canali e nei fiumi con applicazione a vari casi della pratica. [M. I. V., v. VI, pp. 285-324 (1856)].

1610. S 3 b  $\alpha$ .

TURAZZA (Domenico). Intorno alla teoria del moto permanente dell'acqua nei canali e nei fiumi, con alcune applicazioni pratiche alla stima delle portate e dei rigurgiti. [M. I. V., v. X, pp. 381-412 (1861)].

1611. S 3 b  $\alpha$ .

TURAZZA (Domenico). Delle formole di Bazin e delle equazioni del moto permanente dell'acqua negli alvei naturali od artefatti. [M. I. V., v. XVII, pp. 171-188 (1872)].

1612. S 3 b  $\alpha$ .

TURAZZA (Domenico). Di una nuova formula proposta dal Bazin allo scopo di rappresentare la legge con cui varia la velocità di una corrente lungo una stessa verticale. [A. I. V., s. V, t. II, pp. 301-308 (1875-76)].

1613. S 3 b  $\alpha$ .

BUCCIA (Gustavo). Sul movimento della marea negli estuarii. [A. I. V., s. V, t. II, pp. 1033-1046 (1875-76)].

1614. **S 3 b α.**

TURAZZA (Domenico). Delle formole più appropriate pel calcolo degli scoli delle basse pianure e del modo di valutarne la portata massima. [*M. I. V.*, v. XXI, pp. 189-219 (1879)].

1615. **S 4.**

TURAZZA (Domenico). Teoria dinamica del calorico. [*M. I. V.*, v. VIII, pp. 1-86 (1859)].

1616. **S 4.**

PAZIENTI (Antonio). Intorno ad alcune deduzioni termodinamiche. [*M. I. V.*, v. XVIII, pp. 163-169 (1874)].

1617. **S 4 a.**

TURAZZA (Domenico). Intorno alla ipotesi della metamorfosi delle potenze naturali e della conservazione delle forze. [*M. I. V.*, v. IX, pp. 13-40 (1860)].

1618. **S 4 a.**

PAZIENTI (Antonio). Considerazioni generali intorno alla termodinamica. [*M. I. V.*, v. XVI, pp. 9-20 (1871)].

1619. **S 4 a.**

PAZIENTI (Antonio). Intorno all'equivalente meccanico del calore. [*M. I. V.*, v. XIX, pp. 111-116 (1876)].

1620. **S 4 a.**

PAZIENTI (Antonio). Considerazioni generali intorno alla Termodinamica. [*M. I. V.*, v. XX, pp. 249-256 (1876)].

1621. **S 4 b.**

TURAZZA (Domenico). Di alcuni problemi spettanti alla teoria dinamica del calorico. [*M. I. V.*, v. X, pp. 335-380 (1861)].

1622. **S 4 b α.**

PAZIENTI (Antonio). Considerazioni generali intorno alla termodinamica. [*M. I. V.*, v. XXI, pp. 651-653 (1879)].

1623. **S 4 b β.**

CONTI (Carlo). Intorno al calcolo della azione dinamica del vapore nella Locomotiva avuto riguardo alle circostanze della precessione. [*M. I. V.*, v. IV, pp. 133-200 (1852)].

1624. **S 4 b β.**

TURAZZA (Domenico). Intorno alla teoria delle macchine a vapore. [*M. I. V.*, v. VII, pp. 169-207 (1857)].

1625. **T 2 a β.**

TURAZZA (Domenico). Equilibrio di un'asta parallelepipedo rettangolare. [*M. I. V.*, v. XVIII, pp. 219-252 (1874)].

1626. **T 3 a.**

SANTINI (Giovanni). Considerazioni intorno al calcolo degli oculari per canocchiali astronomici dirette a distruggere le aberrazioni secondarie di rifrattività e di sfericità da essi dipendenti. [*M. I. V.*, v. I, pp. 3-38 (1843)].

1627. **T 3 a.**

BATTELLI (Angelo). Sulla propagazione della luce in un sistema catadiottrico. [*A. I. V.*, s. VI, t. II, pp. 1081-1095 (1883-84)].

1628. **T 6, T 7 a.**

RICCI (Gregorio). Sulla funzione potenziale di conduttori di correnti galvaniche costanti. [*A. I. V.*, s. V, t. VIII, pp. 1025-1048 (1881-82)].

1629. **U, R 8 e.**

LORENZONI (Giuseppe). Dimostrazione delle formole di precessione e nutazione. [*A. I. V.*, s. VI, t. III, pp. 1025-1092 (1884-85)].

**U** (*Vedi* n° 1514, 1537).

1630. **U 10 a.**

CONTI (Carlo). Un facile criterio e qualche semplice regola per procedere con esattezza nella livellazione topografica. [*M. I. V.*, v. II, pp. 151-169 (1845)].

1631. **U 10 a.**

SANTINI (Giovanni). Delle recenti ricerche intorno alla vera figura della terra dedotta dalle principali misure eseguite nella direzione dei suoi meridiani. [*M. I. V.*, v. XI, pp. 219-267 (1862)].

1632. **U 10 a.**

SANTINI (Giovanni). Relazione intorno alle attrazioni locali risultanti ne' dintorni di Mosca dietro il confronto delle posizioni geodesiche colle osservazioni astronomiche istituite in diversi punti di quel circondario. [*M. I. V.*, v. XII, pp. 77-99 (1864)].

1633. **V 1.**

BELLAVITIS (Giusto). Considerazioni sulla matematica pura. [*M. I. V.*, v. XIV, pp. 1-34 (1868); v. XV, pp. 375-423 (1870); v. XVII, pp. 189-253 (1872)].

1634. **V 1 a.**

BELLAVITIS (Giusto). Proposta di un repertorio generale di pubblicazioni matematiche. [*A. I. V.*, s. III, t. VI, pp. 625-630 (1860-61)].

**V 2.** (*Vedi* n° 1502).

1635. **V 7, K 14 b.**

MINICH (Serafino Raffaele). Sopra un teorema della geometria dei solidi osservato dal Cartesio e sopra altri teoremi concernenti i poliedri. [*A. I. V.*, s. III, t. V, pp. 959-965 (1859-60)].

1636. **V 7.**

FAVARO (Antonio). Miscellanea Galileiana inedita. [*M. I. V.*, v. XXII, pp. 701-1035 (1887)].

1637. **V 9.**

FAVARO (Antonio). Intorno ad una lettera di C. F. Gauss ad E. G. M. Olbers, pubblicata da D. B. Boncompagni. [*A. I. V.*, s. VI, t. III, pp. 53-62 (1884-85)].

1638. **X 4 a.**

FAVARO (Antonio). Sulle prime operazioni del Calcolo grafico. [*A. I. V.*, s. IV, t. I, pp. 1391-1463 (1871-72)].

1639. **X 4 a, J 2 g.**

FAVARO (Antonio). Intorno alla soluzione grafica di alcuni problemi pratici dipendenti dalla teoria delle probabilità. [*A. I. V.*, s. V, t. III, pp. 1023-1034 (1886-77)].

1640. **X 6.**

FAVARO (Antonio). Intorno ad uno strumento ordinato a calcolare i risultati d'osservazione ottenuti mediante apparecchi autografici. [*A. I. V.*, s. V, t. II, pp. 559-566 (1875-76)].

1641. **X 8.**

FAVARO (Antonio). Sulla elica calcolatoria di Fuller con cenni storici sopra gli strumenti calcolatori a divisione logaritmica. [*A. I. V.*, s. V, t. V, pp. 495-520 (1878-79)].

## ERRATA — CORRIGE.

Ai n<sup>i</sup> 1459 e 1460 leggasi **T 7 a** invece di **U 7 a**.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA  
delle Scienze Matematiche e Fisiche.  
(1868-1887) (\*).

---

ABBREVIATURE.

*B. Bon.* == Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche, pubblicato da B. Boncompagni, [Roma].  
TOMI: I-XX (1868-1887); in-4°.

t. = Tomo, pp. = Pagine.

---

1642. A\*.

VIÈTE (François). Introduction à l'art analytique par François Viète. Traduit par M. F. Ritter. [*B. Bon.*, t. I, pp. 223-275 (1868)].

1643. A\*.

CHUQUET (Nicolas). *La Triparty en la science des nombres*; par Maistre Nicolas Chuquet Parisien, d'après le manuscrit *Fonds français* n° 1346 de la Bibliothèque nationale de Paris. [*B. Bon.*, t. XIII, pp. 593-659, 693-814 (1880); t. XIV, pp. 413-416 (1881)].

1644. A\*.

CHUQUET (Nicolas). Problèmes numériques faisant suite et servant d'application au Triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet Parisien. Extrait de la seconde partie du ms. n° 1346 du *Fond français* de la Bibliothèque nationale. [*B. Bon.*, t. XIV, pp. 417-460 (1881)].

1645. A\*, K\*.

Traité d'algorisme (Manuscrit de la Bibliothèque Sainte Geneviève côté « RI 17 » feuillets 150-151). [*B. Bon.*, t. XV, pp. 53-55 (1882)].

Traité de géométrie (même manuscrit, feuillets 151-163). [*B. Bon.*, t. XV, pp. 55-70 (1882)].

1646. A 1; K 1, 17 a, 13 c, 14 c, 15 b, 16 g; L' 1 a; R 2 b; V.  
MAUROLICO (F.). Scritti inediti. [*B. Bon.*, t. IX, pp. 23-121 (1857)].

---

(\*) Il lavoro di spoglio e di classificazione di questa pubblicazione è dovuto al prof. G. Loria.

**C 1 b.** (*Vedi* n° 1798, 1799, 1800, 1801).

**D 2 b.** (*Vedi* n° 1734, 1810).

**F 4 a.** (*Vedi* n° 1823, 1867).

**G 1 e.** (*Vedi* n° 1867).

**G 2 b a.** (*Vedi* n° 1867).

#### 1647. **H 1.**

CONDORCET (J. A. N., marquis de). Des méthodes d'approximation pour les équations différentielles lorsqu'on connaît une première valeur approchée. Mémoire inédit. (Bibliothèque de l'Institut de France, Portefeuille M. 57<sup>o</sup>, in folio). [B. Bon., t. XVI, pp. 292-324 (1883)].

#### 1648. **I 1.**

ADELARDO DI BATH. Regulae Abaci. [B. Bon., t. XIV, pp. 91-134 (1881)].

#### 1649. **I 1.**

Due trattati inediti d'Abaco. [B. Bon., t. XV, pp. 135-162 (1882)].

#### 1650. **I 1.**

CAPELLI (Marziano). Brano dell'*Aritmetica di Marziano Capelli*. (Codice della Biblioteca Vaticana contrassegnato *Regina Svecorum* n° 1762, car. 213, verso, lin. 5-21, car. 214-217). [B. Bon., t. XV, pp. 566-571 (1882)].

#### 1651. **I 1.**

Commento di Remigio d'Auxerre all'*Aritmetica di Marziano Capelli* (Codice della Biblioteca Vaticana contrassegnato *Regina Svecorum*, n° 1970, car. 15, verso, lin. 32-37, car. 16-19, car. 20, recto lin. 1-4). [B. Bon., t. XV, pp. 572-580 (1882)].

#### 1652. **I 1, I 23 a.**

GÜNTHER (Sigismondo). Paragone di due metodi per la determinazione approssimata di quantità irrazionali. Traduzione dal tedesco del Dr. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. VII, pp. 590-596 (1874)].

**I 1.** (*Vedi* n° 1673, 1745, 1748).

#### 1653. **I 2.**

LUCAS (E.). Sur un théorème de l'arithmétique indienne. [B. Bon., t. IX, pp. 157-164 (1876)].

#### 1654. **I 2.**

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Soluzione della « Question 391 » della « Nouvelle correspondance mathématique ». [B. Bon., t. XI, pp. 487 (1878)].

*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 2<sup>a</sup>.—Stampato il 24 giugno 1895.

**I 2.** (*Vedi* n° 1702, 1719, 1734).

**I 3.** (*Vedi* n° 1734).

**I 4.** (*Vedi* n° 1911).

**I 4 a β** (*Vedi* n° 1862).

1655. **I 4 a β.**

GENOCCHI (Angelo). Sur la loi de réciprocité de Legendre étendue aux nombres non premiers. (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. [B. Bon., t. XVIII, pp. 235-237 (1885)].

1656. **I 4 a β.**

GENOCCHI (Angelo). Sur quelques théorèmes qui peuvent conduire à la loi de réciprocité de Legendre. [B. Bon., t. XVIII, pp. 238-243 (1885)].

1657. **I 6 d.**

GENOCCHI (Angelo). Teoremi di Sofia German intorno ai residui biquadratici. [B. Bon., t. XVI, p. 248-251 (1883)].

1658. **I 7 c, I 7 d.**

GENOCCHI (Angelo). Ancora un cenno dei residui cubici e biquadratici. [B. Bon., t. XVIII, pp. 231-234 (1885)].

1659. **I 13.**

GENOCCHI (Angelo). Alcune asserzioni di Gauss circa le forme quadratiche  $YY \pm nZZ$ . [B. Bon., t. XVII, pp. 245-247 (1884)].

1660. **I 19 c.**

GENOCCHI (Angelo). Brano di lettera diretta a D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. XVI, pp. 211-212 (1883)].

1661. **I 19 c.**

REALIS (Savarino). Sopra un'equazione indeterminata. [B. Bon., t. XVI, pp. 213-214 (1883)].

**I 19 c.** (*Vedi* n° 1734).

**I 23 a.** (*Vedi* n° 1652, 1701, 1749).

1662. **K.**

Extraits du Traité de Géométrie de Claude Mydorge. (Manuscrit *Fonds français*, n° 656 de la Bibliothèque Nationale de Paris). [B. Bon., t. XIV, pp. 279-350 (1881)].

**K°.** (*Vedi* n° 1645, 1781).

**K 1.** (*Vedi* n° 1646).

1663. **K 3 b, K 10 c, K 21 c.**

ZECCHINI LEONELLI (Giuseppe). Scritti inediti. [B. Bon., t. XVIII, pp. 661-671 (1885)].

**K 3 c.** (*Vedi* n° 1706).

**K 7.** (*Vedi* n° 1674).

**K 10 c.** (*Vedi* n° 1663, 1795).

1664. **K 11 e.**

Catalogo di lavori relativi al problema di Malfatti. [B. Bon., t. IX, pp. 388-392 (1876)].

**K 13 c, K 14 c, K 15 b, K 16 g, K 17 a** (*Vedi* n° 1646).

**K 21 c.** (*Vedi* n° 1663).

**L.** (*Vedi* n° 1674).

**L' I a.** (*Vedi* n° 1646).

**R 2 b.** (*Vedi* n° 1675).

**R 6 b.** (*Vedi* n° 1676).

**R 7 c.** (*Vedi* n° 1861).

**S 1 a.** (*Vedi* n° 1831).

1665. **T.**

MAGGI (Pietro). Intorno ai principii di meccanica molecolare del Dottore A. m. brogio Fusinieri [B. Bon., t. XII, pp. 847-862 (1879)].

**T 2 a.** (*Vedi* n° 1677).

1666. **U.**

BARTOLOMEO DA PARMA. Tractatus sphæræ. Parti prima e seconda. (Biblioteca Vittorio Emanuele, Codice « Santa Croce » n° 228, carte 47-83). [B. Bon., t. XVII, pp. 43-120, 165-218 (1884)].

**U.** (*Vedi* n° 1678, 1684, 1685, 1686, 1713, 1715, 1716, 1718, 1724, 1742, 1746, 1764, 1808, 1860, 1885, 1886, 1913).

1667. **V.**

CATALAN (E.). Sur un article du *Journal des Savants*. [B. Bon., t. IV, pp. 127-134 (1871)].

1668. **V.**

RICCARDI (Geminiano). Due scritti inediti. I. Saggio di alcune noterelle relative allo scritto intitolato: « Mémoire sur les travaux et les écrits de M. Le-

gendre, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes et des principales Académies de l'Europe » segnato in fine dalle iniziali « F. M. », col data di Ginevra 24 febbrajo 1833 ed inserito nel giornale *La bibliothèque universelle* (vedi il quaderno Janvier et Février 1833, XVIII Année, Sciences et Arts, t. LII, pp. 45-82). II. Breve esame critico sopra un annuncio relativo ai lavori instituiti dalla R. Accademia delle Scienze e Belle Lettere di Bruxelles nell'adunanza del 15 dicembre 1839. Nota letta alla R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, nell'adunanza della Sezione di Scienze del 30 Maggio 1849. [B. Bon., t. VIII, pp. 36-50 (1875)].

## 1669. V.

FAVARO (Antonio). La storia delle matematiche nella Università di Padova. Lettera a D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. XI, pp. 799-801 (1878)].

## 1670. V.

NARDUCCI (E.). Notizie di libri relativi alle matematiche posseduti dalla Biblioteca Alessandrina e non citati dal Conte Giovanni Maria Mazzuchelli nella parte stampata della sua opera « Gli scrittori d'Italia ecc. ». [B. Bon., t. XIII, p. 369-378 (1880)].

## 1671. V.

I precursori inglesi del Newton. Traduzione dall'inglese del prof. Antonio Favarò. [B. Bon., t. XIII, pp. 481-514 (1880)].

## 1672. V.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno a due quesiti proposti nella raccolta intitolata « Giornale degli eruditi e curiosi, Anno I, v. II, maggio-ottobre 1883 ». [B. Bon., t. XVI, p. 673-686 (1883)].

## 1673. V, (I 1).

STIATTESI (Andrea). Sull'aritmetica. Dissertazione storico-critica. [B. Bon., t. III, p. 389-408 (1870)].

## 1674. V, (K 7, L).

HANKEL (Ermanno). Prospetto storico dello sviluppo della geometria moderna. Scritto postumo. Traduzione dal tedesco del Dr. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. IX, pp. 267-289 (1876)].

## 1675. V, (R 2 b).

PIANI (Domenico). Intorno al centro di gravità. Notizie storico-critiche. [B. Bon., t. I, pp. 41-42 (1868)].

## 1676. V, (R 6 b).

MAYER (Adolfo). Storia del principio della minima azione. Prelezione accademica. Traduzione dal tedesco dell'ing. G. B. Biadego. [B. Bon., t. XI, pp. 155-166 (1878)].

1677. **V, (T 2 a).**

**CIPOLLETTI** (Domenico). Intorno ad alcune definizioni della forza di resistenza dei corpi solidi corrispondenti ai due metodi analitico e sintetico coi quali è stata studiata la teoria dell'elasticità. [B. Bon., t. I, pp. 43-50 (1868)].

1678. **V, (U).**

**SÉDILLOT**. (L. Am.). Sur quelques points de l'astronomie ancienne et en particulier sur la précession des équinoxes. Lettre de M. L. Am. Sédillot à D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. V, pp. 306-317 (1872)].

1679. **V 3, V 4 c, V 5 a, V 6.**

**MARRE** (Aristide). Manière de compter des anciens avec les doigts des mains, d'après un petit poème inédit arabe de Chems-Eddin el Mossouli et le *Tratado de mathematicas* de Juan Perez de Moyà, imprimé à Alcalá de Henares en 1573. [B. Bon., t. I, pp. 309-318 (1868)].

1680. **V 3 a.**

**MARTIN** (Th. H.). Sur un ouvrage faussement attribué à Aristarque de Samos. Lettre de M. Th. H. Martin à B. Boncompagni. [B. Bon., t. III, pp. 299-302 (1870)].

1681. **V 3 a.**

**DUPUIS** (J.). Note sur un passage géométrique de la *République* de Platon. [B. Bon., t. XIX, pp. 641-644 (1886)].

1682. **V 3 a.**

**DUPUIS** (J.). Note sur un passage géométrique du *Ménon* de Platon. [B. Bon., t. XIX, pp. 645-650 (1886)].

1683. **V 3 a.**

**BALDI** (Bernardino). Vita di Pitagora, tratta dall'autografo ed annotata da Enrico Narducci. [B. Bon., t. XX, pp. 197-308 (1887)].

1684. **V 3 a, (U).**

**MARTIN** (Th. H.). Hypothèse astronomique de Pythagore. [B. Bon., t. V, pp. 99-126 (1872)].

1685. **V 3 a, (U).**

**MARTIN** (Th. H.). Hypothèse astronomique de Philolaus. [B. Bon., t. V, pp. 127-157 (1872)].

1686. **V 3 a, (U).**

**SÉDILLOT** (L. Am.). Sur l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon. [B. Bon., t. VI, pp. 239-248 (1873)].

1687. **V 3 a, V 3 b, V 5 a, V 5 b.**

**BALDI** (Bernardino). Vite inedite di matematici italiani pubblicate da Enrico Narducci. [B. Bon., t. XIX pp. 335-406, 437-489, 521-640 (1886)].

1688. **V 3 a, V 4 a, V 4 c, V 5 b, V 7, V 8, V 9.**

HENRY (C.). Lettre à M. le prince D. B. Boncompagni sur divers points d'histoire des mathématiques. [B. Bon., t. XX, pp. 389-403 (1887)].

1689. **V 3 a, V 5 b.**

GÜNTHER (Sigismondo). Lo sviluppo storico della teoria dei poligoni stellati nell'antichità e nel medio evo. Traduzione dal tedesco del D. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. VI, pp. 313-340 (1873)].

1690. **V 3 b.**

FRIEDEIN (Godofredo). De Heronis quae feruntur definitionibus. [B. Bon., t. IV, pp. 93-121 (1871)].

1691. **V 3 b.**

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno alle definizioni di Erone Alessandrino. [B. Bon., t. IV, pp. 122-126 (1871)].

1692. **V 3 b.**

CANTOR (Maurizio). Euclide e il suo secolo. Saggio storico matematico di Maurizio Cantor. Traduzione di G. B. Biadego. [B. Bon., t. V, pp. 1-73 (1872)].

1693. **V 3 b.**

FRIEDEIN (Godofredo). De Hypside mathematico. [B. Bon., t. VI, p. 493-529 (1873)].

1694. **V 3 b.**

MARTIN (Th. H.). Sur l'époque et l'auteur du prétendu XV<sup>e</sup> Livre des Éléments d'Euclide. Lettre à D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. VII, pp. 263-266 (1874)].

1695. **V 3 b, V 4 c, V 5 a.**

MARTIN (Th. H.). Ptolomée, auteur de l'*Optique* traduite en latin par Ammiratus Eugenius Siculus sur une traduction arabe incomplète, est-il le même que Claude Ptolomée auteur de l'*Almageste*? [B. Bon., t. IV, pp. 466-469 (1871)].

1696. **V 3 b, V 4 c, V 5 a.**

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad una traduzione latina dell'Ottica di Tolomeo. [B. Bon., t. IV, pp. 470-492 (1871); t. VI, pp. 159-170 (1873)].

1697. **V 3 b, V 4 c, V 5 b.**

GÜNTHER (Sigismondo). Le origini ed i gradi di sviluppo del principio delle coordinate. Traduzione del tedesco con note del Dr. Giovanni Gabieri. [B. Bon., t. X, pp. 363-406 (1877)].

1698. **V 3 b, V 6.**

JACOLI (Ferdinando). Intorno ad una edizione degli Elementi di Euclide. Lettere del Prof. Ing. Ferdinando Jacoli a B. Boncompagni. [B. Bon., t. III, pp. 297-298 (1870)].

1699. **V 3 b, V 8, V 9.**

ENESTRÖM (G.). Notice bibliographique sur les traductions en suédois des *Éléments d'Euclide*. [B. Bon., t. XVIII, pp. 332-342 (1885)].

**V 3 b.** (*Vedi* n° 1687).

1700. **V 3 c.**

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno al commento di Proclo sul primo libro degli *Elementi* di Euclide. [B. Bon., t. VII, pp. 152-165 (1874)].

1701. **V 3 c, V 4 a, V 4 c, V 5 b, V 6, V 7, V 8, (I 28 a).**

GÜNTHER (Sigismondo). Storia dello sviluppo della teoria delle frazioni continue fino all'Euler. Traduzione del D. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. VII, pp. 213-254 (1874)].

1702. **V 3 c, V 6, V 9 (I 2).**

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad una proprietà de' numeri dispari. [B. Bon., t. VIII, pp. 51-62 (1875)].

1703. **V 3 d, V 5 a.**

FRIEDELEIN (G.). Annotationes ad historiam matheseos spectantes. I. Pauca de Johannis Pediasimi Geometria annotanda. II. Designis— et —. III. De Victorii Calculo. [B. Bon., t. III, pp. 303-306 (1870)].

1704. **V 4 a.**

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno all'opera di Albiruni sull'India. [B. Bon., t. II, pp. 153-206 (1869)].

1705. **V 4 a.**

SÉDILLOT (L. Am.). Grande exécution d'automne. Lettre à M. le D. Ferdinand Hoefer au sujet des sciences mathématiques des Indiens, et des origines du sanscrit. [B. Bon., t. VIII, pp. 457-468 (1875)].

1706. **V 4 a, (K 3 c)..**

MARRE (A.). Théorème du carré de l'hypoténuse. [B. Bon., t. XX, pp. 404-406 (1887)].

**V 4 a.** (*Vedi* n° 1688, 1701).

1707. **V 4 b.**

SÉDILLOT (L. Am.). De l'astronomie et des mathématiques chez les Chinois. Lettre de M. L. Am. Sédillot à D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. I, pp. 161-166 (1868)].

## 1708. V 4 c.

SÉDILLOT (L. Am.). De l'école de Bagdad et des travaux scientifiques des Arabes. Lettre de M. L. Am. Sédillot à D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. I, pp. 217-222 (1868)].

## 1709. V 4 c.

Storia delle matematiche presso gli Arabi del Dr. Ermanno Hankel. Traduzione dal tedesco del sig. Filippo Keller. [B. Bon., t. V, pp. 343-401 (1872)].

## 1710. V 4 c.

Vite di matematici arabi tratte da un'opera inedita di Bernardino Baldi. Con note di M. Steinschneider. [B. Bon., t. V, pp. 427-534 (1872)].

## 1711. V 4 c.

BONCHON BRANDELY (G.). Quelques remarques sur deux articles du *Bulletin* (t. V) intitulés « Storia delle matematiche presso gli Arabi, del Dr. Ermanno Hankel » et « Vite di matematici arabi ecc. con note di M. Steinschneider ». [B. Bon., t. VI, p. 65-68 (1873)].

## 1712. V 4 c.

MARRE (A.). Extrait du *Kitāb al-Mobdrek d'Abū'l Wafā' al-Djouzī*, transcrit d'après le ms. 1912 du *Supplément Arabe* de la Bibliothèque nationale de Paris, et traduit pour la première fois en français. [B. Bon., t. VII, pp. 267-277 (1873)].

## 1713. V 4 c. (U).

SÉDILLOT (L. Am.). Sur les emprunts que nous avons faits à la science Arabe, et en particulier de la troisième inégalité lunaire ou variation par Aboul-Wefā de Bagdad astronome du X<sup>e</sup> siècle. [B. Bon., t. VIII, p. 63-78 (1875)].

## 1714. V 4 c.

STEINSCHNEIDER (M.). Rectifications de quelques erreurs relatives au mathématicien arabe Ibn Al-Banna. [B. Bon., t. X, pp. 313-314 (1877)].

## 1715. V 4 c., V 4 d. (U).

STEINSCHNEIDER (M.). Études sur Zarkali, astronome arabe du XI<sup>e</sup> siècle, et ses ouvrages. [B. Bon., t. XIV, pp. 171-182 (1881); t. XVI, pp. 493-504 (1883); t. XVII, pp. 765-794 (1884); t. XVIII, pp. 343-360 (1885); t. XX, pp. 1-36, 575-604 (1887)].

## 1716. V 4 c., V 4 d. (U).

STEINSCHNEIDER (M.). Notice sur un ouvrage astronomique inédit d'Ibn Haitham. [B. Bon., t. XIV, pp. 721-740 (1882). Supplément t. XVI, pp. 505-513 (1883)].

1717. **V 4 c, V 5 b.**

NARDUCCI (E.). Intorno ad una traduzione italiana, fatta nel secolo decimo-quarto, del trattato d'ottica d'Alhagén, matematico del secolo undecimo, e ad altri lavori di questo scienziato. [B. Bon., t. IV, pp. 1-48, 137-139 (1871)].

1718. **V 4 c, V 6, (U).**

SÉDILLOT (L. Am.). Sur la détermination de la troisième inégalité lunaire ou variation par Abu'l-Wéfá et Tycho Brahé. Lettre de M. L. Am. Sédillot à D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. I, pp. 51-53 (1868)].

1719. **V 4 c, V 7, (I 2).**

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno alla somma delle quarte potenze dei numeri naturali. [B. Bon., t. X, pp. 294-302 (1877)].

1720. **V 4 c, V 9.**

SÉDILLOT (L. Am.). Des savants arabes et des savants d'aujourd'hui à propos de quelques rectifications. Lettre de M. L. Am. Sédillot à D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. IV, pp. 401-418 (1871)].

1721. **V 4 c, V 9.**

MARTIN (Th. H.). Quelques mots de réponse à M. Sédillot par Th. H. Martin. [B. Bon., t. IV, pp. 464-465 (1871)].

1722. **V 4 c, V 9.**

SÉDILLOT (L. Am.). Lettre de M. L. Am. Sédillot à D. B. Boncompagni au sujet d'une Note de M. Th. H. Martin. [B. Bon., t. V, p. 294 (1872)].

**V 4 c.** (*Vedi* n° 1679, 1688, 1695, 1696, 1697, 1701).

1723. **V 4 d.**

STEINSCHNEIDER (M.). Prophati Judæi Montepessulanus (a. 1300) Proe-  
mium Almanach adhuc ineditum e versionibus duabus antiquis (altera quo-  
que interpolata) una cum texto hebraico e manuscriptus primum edidit, suam-  
que versionem latinam verbalem adjecit Mauritius Steinschneider.  
[B. Bon., t. IX, pp. 595-614 (1876)].

**V 4 d.** (*Vedi* n° 1715, 1716).

1724. **V 5 a, (U).**

CURTZE (Maximilien). Sur l'astronomie de Boëce signalée par M. le Dr. Maurice Cantor. [B. Bon., t. I, p. 140 (1868)].

1725. **V 5 a.**

Victorii Calculus ex codice Vaticano editus a Godofredo Friedlein.  
[B. Bon., t. IV, pp. 443-463 (1871)].

Rend. Circ. Matem., t. IX, parte 2<sup>a</sup>.—Stampato il 29 giugno 1895.

## 1726. V 5 a, V 5 b.

NARDUCCI (E.). Intorno ad un commento inedito di Remigio d'Auxerre al « Satyricon » di Marziano Capelli e ad altri commenti al medesimo « Satyricon ». [B. Bon., t. XV, pp. 505-565 (1882)].

V 5 a. (Vedi n° 1679, 1687, 1695, 1696, 1703).

## 1727. V 5 b.

CURTZE (M.). Sur l'ortographe du nom et sur la patrie de Witelo (Vitello). [B. Bon., t. IV, pp. 49-77 (1871)].

## 1728. V 5 b.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad un manoscritto dell'opera di Vitello citato da Fra Luca Pacioli. [B. Bon., t. IV, pp. 78-81 (1871)].

## 1729. V 5 b.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno al *Tractatus proportionum* di Alberto di Sassonia. [B. Bon., t. IV, pp. 498-511 (1871)].

## 1730. V 5 b.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad un passo della Geometria di Boezio relativo al pentagono stellato. [B. Bon., t. VI, pp. 341-356, 544 (1873)].

## 1731. V 5 b.

DE SIMONI (Cornelio). Intorno alla vita ed ai lavori di Andalò di Negro matematico ed astronomo genovese del secolo decimoquarto e d'altri matematici e cosmografi genovesi. [B. Bon., t. VII, pp. 313-336 (1874)].

## 1732. V 5 b.

ANDALÒ DE NEGRI. (De le vite de matematici libri due di Bernardino Baldi da Urbino Abbate di Guastalla. MDCXCVI. Tomo II. Manoscritto posseduto da D. B. Boncompagni contrassegnato «n° 134», car. 120-121). [B. Bon., t. VII, pp. 339-376 (1874)].

## 1733. V 5 b.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Catalogo dei lavori di Andalò di Negro. [B. Bon., t. VII, pp. 339-376 (1874)].

## 1734. V 5 b, (D 2 b, I 2, I 3, 119 c).

LUCAS (E.). Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure. [B. Bon., t. V, pp. 129-193, 239-293 (1877)].

## 1735. V 5 b.

RICCARDI (Pietro). Lettera a D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. X, pag. 543 (1877)].

## 1736. V 5 b.

TREUTLEIN (P.). Intorno ad alcuni scritti inediti relativi al calcolo dell'Abaco. Traduzione dal tedesco del Dr. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. X, pp. 587-594 (1877)].

## 1737. V 5 b.

Scritti inediti relativi al calcolo dell'abaco. [B. Bon., t. X, pp. 595-648 (1876)].

## 1738. V 5 b.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno al *Tractatus de Abaco* di Gerlando. [B. Bon., t. X, pp. 648-656 (1877)].

## 1739. V 5 b.

STEINSCHNEIDER (M.). Intorno a *Johannes de Lineriis* (de Liveriis) e *Johannes Siculus* [B. Bon., t. XII, pp. 345-351 (1879)].

## 1740. V 5 b.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni di Sassonia, Giovanni de Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo S. Sepolcro) scritte da Bernardino Baldi. [B. Bon., t. XII, pp. 352-419, 863-872 (1879)].

## 1741. V 5 b.

BALDI (Bernardino). Vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni de Lineriis e Fra Luca Pacioli di Borgo S. Sepolcro). [B. Bon., t. XII, pp. 420-427 (1879)].

Appendice di documenti inediti relativi a Fra Luca Pacioli [B. Bon., t. XII, pp. 428-438 (1879)].

## 1742. V 5 b, (U).

STEINSCHNEIDER (M.). Notice sur les tables astronomiques attribuées à Pierre III d'Aragon. [B. Bon., t. XIII, pp. 413-436 (1880); t. XV, pp. 170-173 (1882)].

## 1743. V 5 b.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad uno scritto inedito di Adelardo di Bath intitolato *Regule Abaci*. [B. Bon., t. XIV, pp. 1-90 (1881)].

## 1744. V 5 b.

HENRY (C.). Sur les deux plus anciens traités français d'algorisme et de géométrie. [B. Bon., t. XV, pp. 42-52 (1882)].

## 1745. V 5 b, (I 1).

NARDUCCI (E.). Intorno a due trattati inediti d'abaco contenuti in due codici vaticani del Secolo XII. [B. Bon., t. XV, pp. 111-134 (1882)].

## 1746. V 5 b, (U).

NARDUCCI (E.). Intorno al « Tractatus sphæræ » di Bartolomeo da Par-

ma astronomo del Secolo XIII e ad altri scritti del medesimo autore. [B. Bon., t. XVII, pp. 1-42 (1884)].

**1747. V 5 b, V 6.**

JACOLI (Ferdinando). Intorno ad un commento di Benedetto Vittori medico faentino al *Tractatus proportionum* di Alberto di Sassonia. [B. Bon., t. IV, pp. 493-497 (1871)].

**1748. V 5 b, V 6, (I 1).**

WOEPCKE (F.). Intorno ad un metodo per la determinazione approssimata degli irrazionali di secondo grado. Brano di lettera del Dr. F. Woepcke a D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. VII, pp. 255-262 (1874)].

**1749. V 5 b, V 6, V 7, (I 23 a).**

FAVARO (A.). Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo. [B. Bon., t. VII, pp. 451-502, 533-589 (1874)].

**V 5 b.** (*Vedi* n° 1687, 1688, 1689, 1697, 1701, 1717, 1726).

**1750. V 6.**

VORSTERAN VAN OIJEN (G. A.). Notices sur Ludolph van Cullen. [B. Bon., t. I, pp. 141-156 (1868)].

**1751. V 6.**

JACOLI (Ferdinando). Notizia sconosciuta intorno a Bonaventura Cavalieri. [B. Bon., t. II, p. 299-312 (1869)].

**1752. V 6.**

GOVI (Gilberto). Intorno a tre lettere di Galileo Galilei tratte dall'Archivio dei Gonzaga. [B. Bon., t. III, pp. 267-281 (1870)].

**1753. V 6.**

Sopra alcuni scritti stampati, finora non conosciuti, di Domenico Maria Novara di Ferrara. Notizie comunicate a richiesta del Principe D. B. Boncompagni alla Società Copernicana di Scienze ed Arti di Thorn, nelle sedute del 27 giugno e 15 agosto 1870 da Massimiliano Curtze. Traduzione del sig. Filippo Keller. [B. Bon., t. IV, pp. 140-148 (1871)].

**1754. V 6.**

Ulteriori notizie intorno ad alcuni scritti stampati, finora non conosciuti, di Domenico Maria Novara di Ferrara, comunicate per incarico del Principe D. B. Boncompagni in Roma alla Società Copernicana per le Scienze ed Arti nella sessione del 5 dicembre 1870 da Massimiliano Curtze. Traduzione del sig. Filippo Keller. [B. Bon., t. IV, p. 149 (1871)].

**1755. V 6.**

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad un opuscolo di Domenico Maria Novara. [B. Bon., t. IV, pp. 340-341 (1871)].

## 1756. V 6.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad alcune note di Galileo Galilei ad un'opera di Giovanni Battista Morin. [B. Bon., t. VI, pp. 45-60 (1873)].

## 1757. V 6.

CATALAN (E.). Intorno ad una iscrizione posta sulla tomba di Ludolf van Ceulen. Lettera a D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. VII, pp. 141-144 (1874)].

## 1758. V 6.

NAPOLI (Federico). Intorno alla vita ed ai lavori di Francesco Maurolico. [B. Bon., t. IX, pp. 1-22 (1876)].

## 1759. V 6.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad un trattato d'aritmetica di Giovanni Widmann di Eger. [B. Bon., t. IX, pp. 188-210 (1876)].

## 1760. V 6.

Copernico in Italia. Traduzione dal tedesco del Dr. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. IX, pp. 315-319 (1876)].

## 1761. V 6.

HIPPLER (F.). Copernico in Bologna. Traduzione del tedesco del Dr. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. IX, pp. 320-325 (1876)].

## 1762. V 6.

LE BESGUE (V. A.). Notes sur les opuscules de Léonard de Pise. [B. Bon., t. IX, pp. 583-594 (1876)].

## 1763. V 6.

CANTOR (Maurizio). Sulla nazionalità di Copernico. Traduzione dal tedesco del Dr. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. IX, pp. 701-716 (1876)].

## 1764. V 6, (U).

JACOLI (F.). Intorno alla determinazione di Domenico Maria Novara dell'obliquità dell'eclittica. [B. Bon., t. X, pp. 75-88 (1887)].

## 1765. V 6.

FAVARO (Antonio). Niccolò Copernico e l'Archivio universitario di Padova. Lettera a D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. X, pp. 303-312 (1877)].

## 1766. V 6.

RICCARDI (Pietro). Intorno ad un opuscolo di Francesco dal Sole. [B. Bon., t. X, pp. 407-418 (1877)].

## 1767. V 6.

Documenti inediti relativi a Francesco dal Sole. [B. Bon., t. X, pp. 419-427 (1877)].

## 1768. V 6.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno alla parola « cumulo » usata da Francesco dal Sole in senso di « mille milioni ». [B. Bon., t. X, pp. 428-431 (1877)].

## 1769. V 6.

CURTZE (M.). Nuove Copernicana da Upsal. Rapporto letto alla Società Copernicana di Scienze ed Arti in Thorn il 4 giugno 1877. Traduzione dal tedesco del Dr. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. XI, pp. 167-171; pp. 172-176 (1878)].

## 1770. V 6.

FAVARO (Antonio). Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocio de' Baldomandi matematico padovano del Secolo XV. [B. Bon., t. XII, pp. 1-74, 115-251 (1879); t. XVIII, pp. 405-423 (1885)].

## 1771. V 6.

FAVARO (Antonio). Intorno alla pubblicazione fatta dal Dr. Carlo Mala-gola di alcuni documenti relativi a Niccolò Copernico e ad altri astronomi e matematici dei secoli XV e XVI. [B. Bon., t. XI, pp. 319-334 (1878)].

## 1772. V 6.

ZERBRAWSKI (T.). Quelques mots au sujet de la note de M. Maximilien Curtze sur l'ortographe du nom et de la patrie de Witelo. [B. Bon., t. XII, pp. 315-317 (1879)].

## 1773. V 6.

FAVARO (Antonio). Intorno ad alcune notizie inedite relative a Niccolò Co-pernico raccolte e pubblicate dal Prof. Massimiliano Curtze. [B. Bon., t. XII, pp. 775-807 (1879)].

## 1774. V 6.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad un trattato d'aritmetica del P. D. Smeraldo Borghetti Lucchese canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore. [B. Bon., t. XXIII, pp. 1-80, 121-200, 245-368 (1880)].

## 1775. V 6.

MARRE (A.). Notice sur Nicolas Chuquet et son *Triparty en la science des nombres*. [B. Bon., t. XIII, p. 555-592 (1880)].

## 1776. V 6.

HENRY (C.). Notice sur un manuscrit inédit de Claude Mydorge. [B. Bon., t. XIV, pp. 271-278 (1881)].

1777. **V 6.**

Alcune lettere inedite di Galileo Galilei pubblicate ed illustrate da Gilberto Govi. [B. Bon., t. XIV, pp. 351-379 (1881)].

1778. **V 6.**

PEROTT (J.). Sur une arithmétique espagnole du seizième siècle. [B. Bon., t. XV, pp. 163-169 (1882)].

1779. **V 6.**

FAVARO (Antonio). Gli autografi di Galileo nell'Archivio Marsigli di Bologna. [B. Bon., t. XV, pp. 581-592 (1882)].

1780. **V 6.**

FAVARO (Antonio). Alcuni scritti inediti di Galileo Galilei tratti dai manoscritti della Biblioteca nazionale di Firenze, pubblicati ed illustrati. [B. Bon., t. XVI, pp. 1-97, 135-210 (1883)].

1781. **V 6. (K).**

HENRY (C.). Problèmes de géométrie pratique de Mydorge. Énoncés et solutions publiés pour la première fois. [B. Bon., t. XVI, pp. 514-544 (1883)].

1782. **V 6.**

UZIELLI (G.). Ricerche intorno a Paolo del Pozzo Toscanelli. [B. Bon., t. XVI, pp. 611-618 (1883)].

1783. **V 6.**

FAVARO (Antonio). Di alcune relazioni tra Galileo Galilei e Federico Cesi illustrate con documenti inediti. [B. Bon., t. XVII, pp. 219-229 (1884)].

1784. **V 6.**

CESI (Federico). Lettere a Galileo Galilei, tratte dai manoscritti galileiani della Biblioteca nazionale di Firenze. [B. Bon., t. XVII, pp. 230-244 (1884)].

1785. **V 6.**

FAVARO (Antonio). Sulla morte di Marco Velsero e sopra alcuni particolari della vita di Galileo Galilei. [B. Bon., t. XVII, pp. 252-270 (1884)].

1786. **V 6.**

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno alla vita ed ai lavori di Francesco Barozzi. [B. Bon., t. XVII, pp. 795-848 (1884)].

1787. **V 6.**

FAVARO (Antonio). Raggiuglio dei manoscritti galileiani nella Collezione Library-Ashburnham presso la Biblioteca Medico-Laurenziana di Firenze. [B. Bon., t. XVII, pp. 849-878 (1884)].

## 1788. V 6.

FAVARO (Antonio). Documenti inediti per la storia dei manoscritti galileiani nella Biblioteca Nazionale di Firenze, pubblicati ed illustrati. [B. Bon., t. XVIII, pp. 1-112, 151-230 (1885)].

## 1789. V 6.

FAVARO (Antonio). Conclusioni sull'accademico incognito oppositore al discorso di Galileo: *Intorno alle cose, che stanno in su l'acqua, o che in quella si muovono.* [B. Bon., t. XVIII, pp. 321-326 (1885)].

## 1790. V 6.

FAVARO (Antonio). Intorno ad alcuni documenti galileiani recentemente scoperti nella Biblioteca Nazionale di Firenze. [B. Bon., t. XIX, pp. 1-54 (1886)].

## 1791. V 6.

FAVARO (Antonio). Documenti per la storia dell'Accademia dei Lincei nei Manoscritti galileiani della Biblioteca nazionale di Firenze. [B. Bon., t. XX, pp. 95-158 (1887)].

## 1792. V 6.

FAVARO (Antonio). La libreria di Galileo Galilei descritta ed illustrata. [B. Bon., t. XIX, pp. 219-291 (1886); t. XX, pp. 372-376 (1887)].

## 1793. V 6.

FAVARO (Antonio). Di Giovanni Tard e di una sua visita a Galileo dal 12 al 15 novembre 1614. [B. Bon., t. XX, pp. 345-371 (1887)].

## 1794. V 6.

RICCARDI (P.). Ancora del trattato *De quadratura circuli* di Giovanni Battista della Porta. [B. Bon., t. XX, pp. 605-606 (1887)].

## 1795. V 6, V 7, (K 10 c).

BIERENS DE HAAN (D.). Notice sur quelques quadrature du cercle dans les Pays Bas. [B. Bon., t. VII, pp. 99-140 (1874)].

## 1796. V 6, V 7, V 8.

BIERENS DE HAAN (D.). Bibliographie néerlandaise historico-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16<sup>e</sup>, 17<sup>e</sup> et 18<sup>e</sup> siècles, sur les sciences mathématiques et physiques et leurs applications. [B. Bon., t. XIV, pp. 512-630, 677-717 (1881); t. XV, pp. 225-312, 355-440 (1882); t. XVI, pp. 393-444, 687-718 (1883)].

## 1797. V 6, V 7, V 8, V 9.

SÉDILLOT (L. Am.). Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collège de France. [B. Bon., t. II, pp. 343-348, 387-448, 461-510 (1869); t. III, pp. 108-170 (1870)].

**V 6.** (*Vedi* n<sup>o</sup> 1679, 1698, 1701, 1702, 1718, 1747, 1748, 1749).

1798. **V 7.** (**G 1 b**).

TARDY (Placido). Intorno ad una formola del Leibniz. [*B. Bon.*, t. I, pp. 177-186 (1868)].

1799. **V 7.** (**G 1 b**).

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad uno scritto del sig. prof. Placido Tardy inserito nel presente Bullettino (Tomo I, 1868, pp. 177-186). [*B. Bon.*, t. II, pp. 273-274 (1869)].

1800. **V 7.** (**G 1 b**).

Intorno ad una formola del Leibniz. Traduzione del sig. Filippo Keller. [*B. Bon.*, t. II, pp. 275-276 (1869)].

1801. **V 7.** (**G 1 b**).

BORCHARDT (G.). Sur quelques passages des lettres de Leibniz relatifs aux différentielles à indice quelconque. Note de M. Ch. G. Borchardt. [*B. Bon.*, t. II, p. 277-278 (1869)].

1802. **V 7.**

JACOLI (Ferdinando). Intorno a due edizioni di Marco Michele Bousquet. Brano di lettera del prof. Ing. Ferdinando Jacoli a D. B. Boncompagni in data di « Genova 10 gennaro 1870 ». [*B. Bon.*, t. III, pp. 91-92 (1870)].

1803. **V 7.**

JACOLI (Ferdinando). Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti detto *Metodo del Roberval*. [*B. Bon.*, t. VIII, pp. 265-307 (1875)].

1804. **V 7.**

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad alcune lettere di Evangelista Torricelli, del P. Marino Mersenne e di Francesco di Verdus. [*B. Bon.*, t. VIII, pp. 353-381 (1875)].

1805. **V 7.**

Lettere di Evangelista Torricelli al P. Marino Mersenne. [*B. Bon.*, t. VIII, pp. 382-409 (1875)].

1806. **V 7.**

Lettere del P. Marino Mersenne ad Evangelista Torricelli. [*B. Bon.*, t. VIII, pp. 410-441 (1875)].

1807. **V 7.**

Lettere di Francesco de Verdus ad Evangelista Torricelli. [*B. Bon.*, t. VIII, pp. 442-456 (1875)].

*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 2<sup>a</sup>.—Stampato l'8 luglio 1895.

## 1808. V 7, (U).

BÉZIAT (L. C.). La vie et les travaux de Jean Hévélius. [B. Bon., t. VIII, pp. 497-558, 589-669 (1873)].

## 1809. V 7.

BIERENS DE HAAN. Notice sur un pamphlet mathématique hollandais intitulé « Bril voor de Amsterdamsche belachelycke Geometristen, Amsterdam 1663 ». [B. Bon., t. XI, pp. 383-452 (1878)].

## 1810. V 7, (D 2 b).

LUCAS (E.). Sur la série récurrente de Fermat. [B. Bon., t. XI, pp. 783-798 (1878)].

## 1811. V 7.

RICCARDI (P.). Nuovi materiali per la storia della Facoltà matematica dell'antica Università di Bologna. [B. Bon., t. XII, pp. 299-312 (1879)].

## 1812. V 7.

HENRY (C.). Recherches sur les manuscrits de Pierre Fermat suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche. [B. Bon., t. XII, pp. 477-568, 619-740 (1879); t. XIII, pp. 437-470 (1880)].

## 1813. V 7.

MARRE (A.). Deux mathématiciens de l'Oratoire. [B. Bon., t. XII, pp. 886-894 (1879)].

## 1814. V 7.

FAVARO (A.). Intorno alla vita ed alle opere di Bartolomeo Sovero, matematico svizzero del Secolo XVII. [B. Bon., t. XV, pp. 1-48 (1882), t. XIX, pp. 99-114 (1886)].

## 1815. V 7.

MARRE (A.) Sur huit lettres inédites du P. Claude Jaquemet de l'Oratoire, né à Valenciennes en Juin 1651, mort à Vienne (Dauphiné) le 16 Septembre 1728. [B. Bon., t. XV, pp. 679-682 (1882)].

## 1816. V 7.

P. Claude Jaquemet de l'Oratoire. Huit lettres inédites. [B. Bon., t. XV, pp. 683-697 (1882)].

## 1817. V 7.

JACOLI (F.). Intorno al problema « Le noeud de cravate » e ad alcune opere di Urbano d'Aviso Romano. [B. Bon., t. XVI, pp. 445-456 (1883)].

## 1818. V 7.

HENRY (C.). Pierre de Carcavy intermédiaire de Fermat, de Pascal et de Huygens, Bibliothécaire de Colbert et du Roi, Directeur de l'Académie des Sciences. [B. Bon., t. XVII, p. 217-391, 879 (1884)].

## 1819. V 7.

LE PAIGE (C.). Correspondance de René-François de Sluze publiée pour la première fois et précédée d'une Introduction. [B. Bon., t. XVII, pp. 427-554, 603-726 (1884)].

## 1820. V 7, V 9.

WOLF (Rudolphe). Matériaux divers pour l'histoire des mathématiques, recueillis par le Dr. Rodolphe Wolf. I. Sur l'invention du niveau à bulle d'air. II. Mort de M. Strauch. III. Correspondance littéraire des Bernoulli. IV. Nicolas Fatio de Diller. V. Marc-Michel Bousquet. VI. Cosimo Bartoli. [B. Bon., t. II, pp. 313-342 (1869)].

## 1821. V 7, V 8, (X 2).

BIERENS DE HAAN (D.). Notices sur des tables logarithmiques hollandaises. [B. Bon., t. VI, pp. 203-238 (1873)].

V 7. (Vedi n<sup>o</sup> 1688, 1701, 1719, 1749, 1795, 1796, 1797).

## 1822. V 8.

FORTI (Angelo). Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgang e Giovanni Bolyai di Bolya, matematici ungheresi. [B. Bon., t. I, pp. 277-299 (1868)].

## 1823. V 7, (F 4 a).

SIACCI (Francesco). Sul teorema del conte di Fagnano. [B. Bon., t. III, pp. 1-26 (1870)].

## 1824. V 8.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad uno scritto intitolato « Memorie concernenti il marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano sino al mese di febbrajo dell'anno 1792 ». [B. Bon., t. III, pp. 27-46 (1870)].

## 1825. V 8.

BIERENS DE HAAN (D.). Notice sur Meindert Semijus. [B. Bon., t. V, pp. 213-220 (1872)].

## 1826. V 8.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno alla vita ed ai lavori di Meindert Semijus. [B. Bon., t. V, pp. 221-227 (1872)].

## 1827. V 8.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad un'opera dell'Abate Nicolò Luigi De La Caille intitolata « *Leçons élémentaires de Mathématiques etc.* ». [B. Bon., t. V, pp. 278-293 (1872)].

## 1828. V 8.

BIADEGO (G. B.). Intorno a dieci lettere inedite di Giuseppe Luigi Lagrange. [B. Bon., t. VI, pp. 101-130 (1873)].

## 1829. V 8.

Dieci lettere inedite di Giuseppe Luigi Lagrange scritte al matematico veronese Antonio Maria Lorgna. [B. Bon., t. VI, pp. 131-141 (1873)].

## 1830. V 8.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno a dieci lettere in lingua italiana di Giuseppe Luigi Lagrange. [B. Bon., t. VI, pp. 142-152, 539-543 (1873)].

## 1831. V 8. (S 1a).

GÜNTHER (Sigismond). Note sur Jean-André de Segner fondateur de la météorologie mathématique. [B. Bon., t. IX, pp. 217-228 (1876)].

## 1832. V 8.

BIADEGO (G. B.). Intorno alla vita ed agli scritti di Gianfrancesco Malfatti matematico del secolo XVIII. [B. Bon., t. IX, pp. 361-381 (1876)].

## 1833. V 8.

Catalogo dei lavori di Gianfrancesco Malfatti. [B. Bon., t. IX, pp. 382-387 (1876)].

## 1834. V 8.

MALFATTI (Gianfrancesco). Lettere inedite di Gianfrancesco Malfatti. [B. Bon., t. IX, pp. 393-480 (1876)].

## 1835. V 8.

ABRIA (O.) et HOUD (Y.). Notice sur la vie et les travaux de Victor Amédée Le Besque. [B. Bon., t. IX, pp. 554-551 (1876)].

## 1836. V 8.

JACOLI (F.). Intorno alla vita ed ai lavori di Antonio Maria Lorgna. [B. Bon., t. X, pp. 1-74 (1877)].

## 1837. V 8.

GENOCCHI (Angelo). Sopra la pubblicazione fatta da B. Boncompagni di undici lettere di Luigi Lagrange a Leonardo Eulero. [B. Bon., t. X, pp. 657-667 (1877)].

## 1838. V 8.

MILLOSEVICH (E.). Intorno alla vita ed ai lavori di Giovanni Santini. [B. Bon., t. XI, pp. 1-110 (1878)].

## 1839. V 8.

CANTOR (Maurizio). Il carteggio fra Lagrange ed Euler. Traduzione dal tedesco del prof. Antonio Favaro. [B. Bon., t. XI, pp. 197-216 (1878)].

## 1840. V 8.

ENESTRÖM (G.). Notice sur la correspondance de Jean Ier Bernoulli. [B. Bon., t. XII, pp. 313-314 (1879)].

1841. **V 8.**

**BONCOMPAGNI** (Baldassarre). Intorno a due scritti di Leonardo Euler. [B. Bon., t. XII, pp. 808-811 (1879)].

1842. **V 8.**

**TYCHSEN** (Camille). Lagrange. Traduit du danois par M. H. G. Zeuthen. [B. Bon., t. XII, pp. 815-827 (1879)].

1843. **V 8.**

**ENESTRÖM** (G.). Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange à Leonard Euler publiées par B. Boncompagni. Traduit du danois par MM. Leouzon Le Duc et Aristide Marre. [B. Bon., t. XII, pp. 828-838 (1879)].

1844. **V 8.**

**BONCOMPAGNI** (Baldassarre). Intorno agli atti di nascita e di morte di Pietro Simone Marchese di Laplace. [B. Bon., t. XV, pp. 446-463 (1882)].

1845. **V 8.**

Atti di nascita e di morte di Pietro Simone Marchese di Laplace. [B. Bon., t. XV, pag. 464 (1882)].

1846. **V 8.**

**HENRY** (C.). Les connaissances mathématiques de Jacques Casanova de Seingalt. [B. Bon., t. XV, pp. 637-669 (1882)].

1847. **V 8.**

**GAUSS** (Carlo Federico). Lettera al Dr. Enrico Guglielmo Mattia Olbers. Traduzione dal tedesco del Dr. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. XVI, pp. 215-217 (1883)].

1848. **V 8.**

**GAUSS** (Carlo Federico). Lettera al Dr. Enrico Guglielmo Mattia Olbers, pubblicata secondo l'autografo posseduto dalla Società Reale delle Scienze di Göttingen. [B. Bon., t. XVI, pp. 218-220 (1883)].

1849. **V 8.**

**HENRY** (C.). Sur la vie et les écrits mathématiques de Jean-Antoine-Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet. [B. Bon., t. XVI, pp. 271-282 (1883)].

1850. **V 8.**

Travaux de J. A. N. Marquis de Condorcet. [B. Bon., t. XVI, pp. 283-291 (1883)].

1851. **V 8.**

**CATALAN** (E.). Une polémique entre Goldbach et Daniel Bernoulli.

Extrait d'une lettre adressée à D. B. Boncompagni en date « Liège, 29 novembre 1884 ». [B. Bon., t. XVIII, pp. 464-467 (1885)].

1852. **V 8.**

ENESTRÖM (Gustave). Sur un théorème de Goldbach. Lettre à D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. XVIII, pag. 468 (1885)].

1853. **V 8.**

HENRY (Ch.). Correspondance inédite de D'Alembert avec Cramer, Lé sage, Clairaut, Turgot, Castillon, Beguelin, etc. publiée avec notice. [B. Bon., t. XVIII, pp. 507-570, 605-645 (1885)].

1854. **V 8.**

D'ALEMBERT. Liste des travaux mathématiques inédits de D'Alembert. [B. Bon., t. XVIII, pp. 646-649 (1885)].

1855. **V 8.**

PORRO (F.). Notizie intorno alla vita ed agli scritti di Giuseppe Zecchini Leonelli, matematico cremonese. [B. Bon., t. XVIII, pp. 625-660 (1885)].

1856. **V 8.**

RICCARDI (Pietro). Per una completa collezione delle opere matematiche di Lorenzo Mascheroni. [B. Bon., t. XIX, pp. 57-66 (1886)].

1857. **V 8.**

REALIS (S.). Giovanni Plananè à Voghera le 8 novembre 1781, mort à Turin le 20 Janvier 1864. [B. Bon., t. XIX, pp. 121-128 (1886)].

1858. **V 8.**

HENRY (C.). Sur quelques billets inédits de Lagrange. [B. Bon., t. XIX, pp. 129-135 (1886)].

1859. **V 8.**

HENRY (C.). Lettres inédites d'Euler à D'Alembert. [B. Bon., t. XIX, pag. 136-148 (1886)].

1860. **V 8, (U).**

HENRY (C.). Lettres inédites de Laplace, publiées avec une première réduction de sa méthode pour déterminer les orbites des comètes et une notice sur les manuscrits de Pingré. [B. Bon., t. XIX, pp. 149-178 (1886)].

1861. **V 8, V 9, (R 7 c).**

BRIOSCHI (Francesco). Intorno al problema della tautochrone. Lettera a D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. IX, (1876)].

1862. **V 8, V 9, (I 4 a β).**

KRONECKER (Leopoldo). Intorno alla storia della legge di reciprocità. Tradu-

zione dal tedesco del Dr. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. XVIII, pp. 244-249 (1885)].

**V 8.** (*Vedi* n° 1688, 1699, 1701, 1796, 1797, 1821).

**1863. V 9.**

Catalogue des travaux de M. Noël Germinal Poudra. [B. Bon. t. I, pp. 302-308 (1868)].

**1864. V 9.**

NARDUCCI (Enrico). Intorno alla vita ed agli scritti di Francesco Woepcke. [B. Bon., t. II, pp. 119-152 (1869)].

**1865. V 9.**

IANICHEFSKY (E.). Notice historique sur la vie et les travaux de Nicolas Ivanovitch Lobatschefsky. Discours prononcé dans la séance solennelle de l'Université impériale de Kazan le  $\frac{5}{17}$  novembre 1868. [B. Bon., t. II, pp. 223-262 (1869)].

**1866. V 9.**

LE ROY (Alphonse). Notice sur la vie et les travaux de Jean Baptiste Brasseur. [B. Bon., t. II, pp. 253-272 (1869)].

**1867. V 9, (F 4 a, G 1 e, G 2 b a).**

GENOCCHI (Angelo). Rassegna d'alcuni scritti relativi all'addizione degl'integrali ellittici ed abeliani. [B. Bon., t. III, pp. 47-66 (1870)].

**1868. V 9.**

SCHERING (Ernest). Notice biographique sur Bernard Riemann. (Traduit de l'allemand par M. le Dr. Paul Mansion). [B. Bon., t. III, pp. 409-428 (1870)].

**1869. V 9.**

MARCHETTI (F.). Cenni necrologici del P. Nazareno Mancini d.C.d.G. [B. Bon., t. III, pp. 429-438 (1870)].

**1870. V 9.**

GENOCCHI (Angelo). Notizie intorno alla vita ed agli scritti di Felice Chiò. [B. Bon., t. IV, pp. 363-380 (1871)].

**1871. V 9.**

BONCOMPAGNI (Baldassatre). Catalogo dei lavori di Felice Chiò. [B. Bon., t. IV, pp. 381-400 (1871)].

**1872. V 9.**

Notice sur les travaux de Jules Plücker par M. Alfred Glebsch,

traduit de l'allemand par le Dr. Paul Mansion. [B. Bon., t. V, pp. 153-212 (1872)].

1873. **V 9.**

Intorno alla vita ed ai lavori del P. Giovanni Antonelli delle Scuole Pie. Cenni di Andrea Stiatteci. [B. Bon., t. V, pp. 253-277 (1872)].

1874. **V 9.**

MENABREA (Luigi Federico). Intorno ad uno scritto del sig. prof. Angelo Genocchi. Lettera del Conte Luigi Federigo Menabrea a D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. V, pp. 301-305 (1872)].

1875. **V 9.**

GENOCCHI (Angelo). Intorno ad una lettera del sig. Conte L. F. Menabrea. Appunti di Angelo Genocchi. [B. Bon., t. V, pp. 535-542 (1872)].

1876. **V 9.**

GENOCCHI (Angelo). Richiamo a favore di Felice Chiò. [B. Bon., t. VI, pp. 153-158 (1873)].

1877. **V 9.**

MANSION (P.). Les mathématiques en Belgique en 1872. [B. Bon., t. VI, pp. 277-312 (1873)].

1878. **V 9.**

MENABREA (L. F.). Un'ultima lettera sulle peripezie della serie di Lagrange in risposta al prof. Angelo Genocchi per L. F. Menabrea a D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. VI, pp. 435-437 (1873)].

1879. **V 9.**

GENOCCHI (Angelo). Breve risposta al sig. Conte L. F. Menabrea. [B. Bon., t. VI, pp. 530-532 (1873)].

1880. **V 9.**

LODI (Luigi). Cenni intorno alla vita ed ai lavori del prof. Geminiano Riccardi. [B. Bon., t. VIII, pp. 1-15 (1875)].

1881. **V 9.**

Catalogo dei lavori del prof. Geminiano Riccardi. [B. Bon., t. VIII, pp. 16-35 (1875)].

1882. **V 9.**

MANSION (Paul). Notice sur la vie et les travaux de Rodolphe Frédéric Alfred Clebsch. [B. Bon., t. VIII, pp. 121-130 (1875)].

1883. **V 9.**

Notice sur la vie de R. F. Alfred Clebsch jusqu'à l'âge de vingt-deux ans, écrite par lui-même. [B. Bon., t. VIII, pag. 131 (1875)].

## 1896. V 9.

GENOCCHI (Angelo). Brano di lettera a D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. XI, pag. 111 (1878)].

## 1897. V 9.

Nécrologie de Joseph-Ivanovitch Somoff. Traduite du russe par M. J. Houel. [B. Bon., t. XI, pp. 453-459 (1878)].

## 1898. V 9.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Catalogo dei lavori del prof. G. I. Somoff [B. Bon., t. XI, pp. 460-481 (1878)].

## 1899. V 9.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Intorno ad una lettera del prof. G. I. Somoff [B. Bon., t. XI, pp. 482-483 (1878)].

## 1900. V 9.

Lettera del prof. G. I. Somoff a D. B. Boncompagni. [B. Bon., t. XI, pp. 484-486 (1878)].

## 1901. V 9.

FAVARO (A.). Della vita e degli scritti fisico-matematici di Ermanno Grassmann. [B. Bon., t. XI, pp. 699-756 (1878)].

## 1902. V 9.

BIADEGO (G. B.). Sulla memoria inedita di Pietro Maggi intorno ai principii di meccanica molecolare di Ambrogio Fusinieri. [B. Bon., t. XII, pp. 839-846 (1879)].

## 1903. V 9.

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Michele Chasles. [B. Bon., t. XIII, pp. 815-827 (1880)].

## 1904. V 9.

HENRY (C.). Supplément à la Bibliographie de Gergonne. [B. Bon., t. XIV, pp. 211-218 (1881)].

## 1905. V 9.

GÜNTHER (S.). Il carteggio tra Gauss e Sofia Germain. Traduzione dal tedesco del Dr. Alfonso Sparagna. [B. Bon., t. XV, pp. 174-179 (1882)].

## 1906. V 9.

STIATTESI. Intorno alla vita ed ai lavori di Sebastiano Purgatti. [B. Bon., t. XVI, pp. 619-672 (1883)].

## 1907. V 9.

BIADEGO (G. B.). Intorno alla vita ed ai lavori di Alberto Castiglione. [B. Bon., t. XVIII, pp. 293-313 (1885)].

1908. **V 9.**

BONCOMPAGNI (Baldassarre). Catalogo dei lavori di Alberto Castigliano. [B. Bon., t. XVIII, pp. 314-320 (1885)].

1909. **V 9.**

MARRE (A.). Notice sur la vie et les travaux de François-Joseph Lionnet. [B. Bon., t. XVIII, pp. 424-428 (1885)].

1910. **V 9.**

Catalogue des travaux de François-Joseph Lionnet. [B. Bon., t. XVIII, pp. 429-440 (1885)].

1911. **V 9, (I 4).**

GENOCCHI (Angelo). Intorno all'ampliamento d'un lemma del Gauss. [B. Bon., t. XVIII, pp. 646-649 (1885)].

1912. **V 9.**

GENOCCHI (Angelo). Brevi cenni della vita dell'ingegnere Savino Realis. [B. Bon., t. XIX, pp. 55-58 (1886)].

1913. **V 9, (U).**

SCHRAMM (Robert). Notice sur les travaux de Théodore d'Oppolzer avec la liste complète de ses publications. Traduite de l'allemand par le Dr. Ernest Pasquier. [B. Bon., t. XX, pp. 439-480 (1887)].

**V 9.** (*Vedi* n° 1688, 1699, 1702, 1720, 1721, 1722, 1797, 1820, 1861, 1862).

**X 2.** (*Vedi* n° 1821).

NOTA.—Nel classificare i lavori storici contenuti nel *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche* fui costretto ad arrecare un piccolo complemento al sistema di notazioni indicato dall'*Index du Répertoire*, affinchè per ciascuno di essi fosse dichiarato, non soltanto il tempo al quale si riferisce, ma eziandio il tema in esso svolto; a tale scopo ho fatto seguire al simbolo cronologico in parentesi un simbolo scientifico. In conseguenza scrivendo ad es. **V 8**, **V 9** (**I 4 a β**) intendo trattarsi di un lavoro storico riferentesi alle vicende della legge di reciprocità nei secoli XVIII e XIX; tale lavoro verrà collocato nei gruppi **V 8**, **V 9**, ma la sua esistenza verrà richiamata nel gruppo **I 4 a β**. Tutto ciò venne fatto per uniformarsi al procedimento generale seguito dai vari compilatori del *Répertoire*; ma non è a tacersi come in un lavoro storico il simbolo riesca sovente superfluo, perchè il titolo lo caratterizza sufficientemente per chiunque abbia presente la cronologia matematica. — Va ancora notato che nel precedente indice ragionato del *B. Bon.* non fu possibile registrare le dottissime note di cui il direttore arricchi buon numero degli articoli ivi inseriti. — Finalmente bisogna avvertire che ogni matematico venne considerato come appartenente per intero al secolo nel quale egli nacque.

GINO LORIA.

**R. ACCADEMIA DEI LINCEI.**  
 (1847-1889) (\*).

---

**ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI ED ABBREVIATURE.**

**N. L. A.** = Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma.  
 TOMI: I-XXIII (1847-1870); in-4°.

**A. A. L. R.** = Atti della Reale Accademia dei Lincei. Roma.  
 TOMI: XXIV-XXVI (1870-1873); in-4°.  
 SERIE II, VOLUMI: I-II (1873-1875); in-4°.

**M. A. L. R.** = Atti della Reale Accademia dei Lincei. Memorie della classe di  
 scienze fisiche, matematiche e naturali. Roma.  
 SERIE II, VOLUME III (1875-1876); in-4°.  
 SERIE III, VOLUMI: I-XIX (1876-1884); in-4°.  
 SERIE IV, VOLUMI: I-VI (1884-1889); in-4°.

**T. A. L. R.** = Atti della Reale Accademia dei Lincei. Transulti. Roma.  
 SERIE III, VOLUMI: I-VIII (1876-1884); in-4°.

**R. A. L. R.** = Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Roma.  
 SERIE IV, VOLUMI: I-V (1884-1889); in-4°.

s. = Serie, t. = Tomo, v. = Volume, pp. = Pagine (\*\*).

**A 1 c. (Vedi ni 2014, 2106, 2108).**

**1914. A 1 c a, 18 b.**  
 CAVALIERI S. BERTOLO (Nicola). Alcune ricerche intorno alle serie aritmetiche. [N. L. A., t. X, pp. 78-93 (1856-57)].

**1915. A 3, D 6 c.**  
 FAVERO (G. B.). Sulle radici delle equazioni algebriche. [M. A. L. R., s. IV, v. VI, pp. 415-42; (1889)].

---

(\*) Il lavoro di spoglio e di classificazione di queste pubblicazioni è dovuto ai professori G. Castelnovo, R. Marcolongo, G. Fano.

(\*\*) Per i volumi dei Rendiconti l'indice apposto al numero romano denota il semestre: così v. IV sta per indicare il volume IV, primo semestre.

**A 3. (Vedi n° 2056).****1916. A 3 b.**

MAINARDI (Gaspare). Pensieri intorno vari argomenti. III. Esprimere le sommatorie simetriche delle radici di una equazione algebrica per i suoi coefficienti. [N. L. A., t. XX, pp. 163-164 (1866-67)].

**1917. A 3 b, A 3 h.**

MINICH (R.). Sull'uso analitico delle differenze tra le radici nella teorica delle equazioni algebriche. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 303-352 (1875-76)].

**1918. A 3 e, A 3 g.**

CAVALIERI S. BERTOLO (Nicola). Scioglimento di un dubbio mosso dal sig. Budan sopra la generale veridicità dei risultamenti del metodo di Lagrange nella ricerca delle radici immaginarie delle equazioni numeriche per approssimazione. [N. L. A., t. IV, pp. 1-10 (1850-51)].

**A 3 h. (Vedi n° 1917).****1919. A 3 i, H 5 fα.**

BESSO (Davide). Sopra una classe di equazioni trinomie. [M. A. L. R., s. III, v. XIX, pp. 631-642 (1883-84)].

**1920. A 3 i.**

BESSO (Davide). Sulle equazioni trinomie e, in particolare, su quelle del settimo grado. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 237-243 (1884-85)].

**1921. A 3 i α, A 4 a.**

KUMMER (Edoardo). Note sur une expression analogue à la résolvante de Lagrange pour l'équation  $z^p = 1$ . [N. L. A., t. VI, pp. 237-241 (1852-53)].

**1922. A 3 k.**

TORTOLINI (Barnaba). Soluzione di un problema relativo all'equazioni del terzo e quarto grado. [N. L. A., t. XXII, pp. 166-168 (1868-69)].

**A 4 a. (Vedi n° 1921).****1923. A 4 d.**

FRATTINI (Giovanni). Un teorema relativo alla trasformazione modulare di grado  $p$ . Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 142-147 (1884-85)].

**1924. A 4 d.**

FRATTINI (Giovanni). Un teorema relativo al gruppo della trasformazione modulare di grado  $p$ . Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 166-168 (1884-85)].

**A 4 d. (Vedi n° 2152).****1925. A 4 d α.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulla equazione dell'ottaedro. [T. A. L. R., s. III, v. III, pp. 233-237 (1878-79)].

## 1926. A 4 d a.

PITTARELLI (Giulio). Sulle forme appartenenti all'ottaedro. [R. A. L. R., s. IV, v. IV<sub>1</sub>, pp. 509-513 (1888)].

## 1927. A 4 e.

MAINARDI (Gaspare). Pensieri intorno a vari argomenti. I. Su la risoluzione delle equazioni algebriche per mezzo di funzioni irrazionali. [N. L. A., t. XX, pp. 153-160 (1866-67)].

## 1928. B 1.

CASORATI (Felice). Osservazioni sui modi comunemente usati nella trattazione di parecchie questioni fondamentali dell'analisi infinitesimale. [T. A. L. R., s. III, v. V, pp. 216-217 (1880-81)].

## 1929. B 1 d.

DE GASPARIS. Prodotto di due determinanti a tre indici espresso con un determinante ordinario. [T. A. L. R., s. III, v. III, pp. 44-45 (1878-79)].

## 1930. B 4.

CAPELLI (Alfredo). Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche. [M. A. L. R., s. III, v. XII, pp. 529-598 (1881-82)].

## 1931. B 4.

CAPELLI (Alfredo). Estensione della formula per numero dei covarianti al caso delle trasformazioni lineari indipendenti. [M. A. L. R., s. III, v. XV, pp. 233-241 (1882-83)].

## 1932. B 4 e.

PASCAL (Ernesto). Sopra un teorema fondamentale nella teoria del calcolo simbolico delle forme ennarie. [R. A. L. R., s. IV, v. IV<sub>1</sub>, pp. 119-124 (1888)].

## 1933. B 4 j.

SPOTTISWOODE. Sur les invariants et les covariants d'une fonction transformée par une substitution quadratique. [T. A. L. R., s. III, v. VII, pp. 218-223 (1882-83)].

## 1934. B 4 j.

PITTARELLI (Giulio). Intorno alla Nota del sig. Spottiswoode: «Sur les invariants et les covariants d'une fonction transformée par une substitution quadratique». Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 327-331 (1884-85)].

## 1935. B 4 j.

PITTARELLI (Giulio). Intorno alla Nota del sig. Spottiswoode: «Sur les invariants et les covariants d'une fonction transformée par une substitution quadratique». Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 374-380 (1884-85)].

## 1936. B 6 c.

DE PAOLIS (Riccardo). Sulla espressione di una forma binaria di grado  $n$  con

una somma di potenze  $n^e$ . [M. A. L. R., s. III, v. XII, pp. 405-413 (1881-82)].

**1937. B 7 c.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Nota sulla quintica binaria. [A. A. L. R., s. II, v. II, pp. 582-591 (1874-75)].

**1938. B 7 c.**

MAISANO (Giovanni). Sulla forma binaria di quinto ordine. [M. A. L. R., s. III, v. XIV, pp. 97-135 (1882-83)].

**1939. B 7 d.**

MAISANO (Giovanni). La sestica binaria. [M. A. L. R., s. III, v. XIX, pp. 9-60 (1883-84)].

**1940. B 7 d.**

BRIOSCHI (Francesco). La forma normale delle equazioni del sesto grado. Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. IV<sub>1</sub>, pp. 301-305 (1888)].

**1941. B 7 d.**

BRIOSCHI (Francesco). La forma normale delle equazioni del sesto grado. Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. IV<sub>1</sub>, pp. 485-488 (1888)].

**1942. B 7 e, B 7 d.**

MAISANO (Giovanni). Alcuni teoremi relativi alle forme binarie di grado qualunque, e loro applicazione allo studio delle radici multiple dell'equazione di 6° grado. [T. R. A. L., s. III, v. VII, pp. 231-232 (1882-83)].

**1943. B 7 e.**

MAISANO (Giovanni). Sopra due classi di forme binarie. [M. A. L. R., s. III, v. XV, pp. 44-56 (1882-83)].

**1944. B 7 f.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulle proprietà di una classe di forme binarie. [R. A. L. R., s. IV, v. II<sub>1</sub>, pp. 302-305 (1885-86)].

**1945. B 7 f.**

D'ovidio (Enrico). Sopra alcuni invarianti simultanei di due forme binarie degli ordini 5 e 4, e sul risultante di esse. [M. A. L. R., s. IV, v. IV, pp. 607-622 (1887)].

**1946. B 8 a.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulle condizioni per la decomposizione di una cubica in una conica ed in una retta. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 89-90 (1875-76)].

**1947. B 8 b.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulle condizioni che devono esser verificate dai parametri di una curva del quarto ordine perchè la medesima sia una conica ripetuta. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 91-92 (1875-76)].

1948. **B 9 d.**

PASCAL (Ernesto). Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche. [*M. A. L. R.*, s. IV, v. V, pp. 375-387 (1888)].

1949. **B 10 b.**

SIACCI (Francesco). Nota intorno alle forme quadratiche. [*A. A. L. R.*, t. XXV, pp. 339-341 (1871-72)].

1950. **B 11 a.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme ternarie bilineari. [*T. A. L. R.*, s. III, v. V, pp. 24-26 (1880-81)].

1951. **B 11 a.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme ternarie bilineari. [*M. A. L. R.*, s. III, v. IX, pp. 3-16 (1880-81)].

1952. **B 11 a.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme quaternarie bilineari. [*T. A. L. R.*, s. III, v. VI, pp. 40-42 (1881-82)].

1953. **B 11 a.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme quaternarie bilineari. [*M. A. L. R.*, s. III, v. XII, pp. 233-255 (1881-82)].

1954. **B 11 a.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme binarie bilineari. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. I, pp. 691-699 (1884-85)].

1955. **C 1 a.**

DE GASPARIS. Sopra una rimarchevole relazione che si verifica in una doppia trasformazione di variabili. [*T. A. L. R.*, s. III, v. II, pp. 192-195 (1877-88)].

1956. **C 2 a.**

GOMES-TEIXEIRA (F.). Sur la détermination de la partie algébrique de l'intégrale des fonctions rationnelles. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. I, pp. 187-188 (1884-85)].

**C 2 d.** (*Vedi* n° 2023).

1957. **C 2 e.**

GOMES-TEIXEIRA (F.). Sur l'intégrale  $\int e^{\omega x} f(x) dx$ . [*R. A. L. R.*, s. IV, v. I, pp. 278-280 (1884-85)].

1958. **C 2 g.**

BRIOSCHI (Francesco). Sopra una formula di trasformazione di integrali multipli. [*R. A. L. R.*, s. IV., v. II<sub>2</sub>, pp. 111-117 (1885-86)].

## 1959. C 2 h.

ASCOLI (Giulio). Sul concetto di integrale definito. [*A. A. L. R.*, s. II, v. II, pp. 862-872 (1874-75)].

## 1960. C 2 h.

SMITH (Henry J. Stephen). Sur les intégrales elliptiques complètes. [*T. A. L. R.*, s. III, v. I, pp. 42-44 (1876-77)].

C 2 h. (*Vedi* n° 2199).

## 1961. C 2 l.

VOLPICELLI (Paolo). Sui criteri d'integrabilità delle funzioni differenziali. [*N. L. A.*, t. IV, pp. 622-668 (1850-51)].

## 1962. C 4.

RICCI (Gregorio). Sopra certi sistemi di funzioni. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 112-118 (1889)].

## 1963. C 4 b.

PADOVA (Ernesto). Sulle espressioni invariabili. [*M. A. L. R.*, s. IV, pp. 4-17 (1887)].

## 1964. C 4 b.

RICCI (Gregorio). Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. III, 1<sup>o</sup> sem., pp. 15-18 (1887)].

## 1965. C 4 b.

BIANCHI (Luigi). Sulle forme differenziali quadratiche indefinite. [*M. A. L. R.*, s. IV, v. V, pp. 539-603 (1888)].

## 1966. C 4 b.

RICCI (Gregorio). Sulla classificazione delle forme differenziali quadratiche. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 203-207 (1888)].

## 1967. C 4 b.

RICCI (Gregorio). Di un punto della teoria delle forme differenziali quadratiche ternarie. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 643-651 (1889)].

## 1968. D 1, D 1 b α.

ASCOLI (Giulio). Nuove ricerche sulla serie di Fourier. [*M. A. L. R.*, s. III, v. II, pp. 584-651 (1877-78)].

## 1969. D 1.

ASCOLI (Giulio). La curva limite di una varietà data di curve. [*M. A. L. R.*, s. III, v. XVIII, pp. 521-586 (1882-83)].

## 1970. D 1.

VOLTERRA (Vito). Sopra le funzioni dipendenti da linee, I. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. III, 2<sup>o</sup> sem., pp. 225-230 (1887)].

*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 2<sup>a</sup>.—Stampato il 4 ottobre 1895.

1971. **D 1.**

VOLTERRA (Vito). Sopra le funzioni dipendenti da linee. II. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 2<sup>o</sup> sem., pp. 274-281 (1887)].

1972. **D 1 a.**

DINI (Ulysse). Sopra una classe di funzioni finite e continue che non hanno mai una derivata. [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 70-72 (1876-77)].

1973. **D 1 a.**

DINI (Ulysse). Sulle funzioni finite continue di variabili reali che non hanno mai derivate. [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 130-133 (1876-77)].

1974. **D 1 a.**

TONELLI (Alberto). Sulla rappresentazione analitica di certe funzioni singolari. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 124-130 (1884-85)].

1975. **D 1 a.**

VOLTERRA (Vito). Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni. I. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 2<sup>o</sup> sem., pp. 97-105 (1887)].

1976. **D 1 a.**

VOLTERRA (Vito). Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni. II. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 2<sup>o</sup> sem., pp. 141-146 (1887)].

1977. **D 1 a.**

VOLTERRA (Vito). Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 2<sup>o</sup> sem., pp. 153-158 (1887)].

1978. **D 1 a.**

CESÀRO (Ernesto). Sui concetti di limite e di continuità. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 12-17 (1888)].

1979. **D 1 a.**

ARZELÀ (Cesare). Funzioni di linee. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 342-348 (1889)].

1980. **D 1 b.**

MAINARDI (Gaspare). Pensieri intorno vari argomenti. IV. Intorno ad una serie di Laplace. [N. L. A., t. XX, pp. 164-166 (1866-67)].

1981. **D 1 d, D 2 a γ.**

ARZELÀ (Cesare). Sulla integrabilità di una serie di funzioni. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 321-326 (1884-85)].

1982. **D 1 d δ.**

ASCOLI (Giulio). Sulla rappresentabilità di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica. [M. A. L. R., s. III, v. IV, pp. 253-300 (1878-79)].

## 1983. D 1 d &amp;

ASCOLI (Giulio). Sulle serie trigonometriche a due variabili. [M. A. L. R., s. III, v. VIII, pp. 263-319 (1879-80)].

## 1984. D 2 a.

CESÀRO (Ernesto). Sur la comparaison des séries divergentes. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 115-118 (1888)].

## 1985. D 2 a.

CESÀRO (Ernesto). Sur une distribution de signes. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 2<sup>o</sup> sem., pp. 133-138 (1888)].

## 1986. D 2 a γ.

ARZELÀ (Cesare). Sulla integrazione per serie. I. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 532-537 (1884-85)].

## 1987. D 2 a γ.

ARZELÀ (Cesare). Sulla integrazione per serie. II. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 566-569 (1884-85)].

## 1988. D 2 b.

ARZELÀ (Cesare). Un teorema intorno alle serie di funzioni. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 262-267 (1884-85)].

## 1989. D 2 b.

ARZELÀ (Cesare). Sopra una certa estensione di un teorema relativo alle serie trigonometriche. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 637-640 (1884-85)].

## 1990. D 2 b.

PINCHERLE (Salvatore). I sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 8-12 (1889)].

## 1991. D 2 b.

PINCHERLE (Salvatore). Nuove osservazioni sui sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 323-327 (1889)].

## 1992. D 2 b α.

ASCOLI (Giulio). Sulla serie  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ . [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 156-159 (1875-76)].

## 1993. D 2 b α.

PINCHERLE (Salvatore). Alcune osservazioni sui polinomi del prof. Appell. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2<sup>o</sup> sem., pp. 214-217 (1885-86)].

## D 2 d. (Vedi n° 2110).

## 1994. D 3 b, D 5 d.

TONELLI (Alberto). Il teorema di Cauchy per le funzioni a più valori. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 785-790 (1884-85)].

## 1995. D 3 f.

PINCHERLE (Salvatore). Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 2<sup>o</sup> sem., pp. 310-315 (1887)].

## 1996. D 4.

PINCHERLE (Salvatore). Sopra una formula del sig. Hermite. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 267-268 (1884-85)].

## 1997. D 4 c.

VOLTERRA (Vito). Sulle funzioni analitiche polidrome. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 2<sup>o</sup> sem., pp. 355-361 (1888)].

## 1998. D 4 e γ.

PINCHERLE (Salvatore). Costruzione di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 1<sup>o</sup> sem., pp. 370-375 (1887)].

## 1999. D 5 c β.

DINI (Ulisse). Su una funzione analoga a quella di Green. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 129-137 (1875-76)].

## 2000. D 5 c β.

VOLTERRA (Vito). Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse. I. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 2<sup>o</sup> sem., pp. 281-287 (1887)].

## 2001. D 5 c β.

VOLTERRA (Vito). Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse. II. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 107-115 (1888)].

## 2002. D 5 c β.

VOLTERRA (Vito). Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse. III. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 196-202 (1888)].

## 2003. D 5 c β.

VOLTERRA (Vito). Delle variabili complesse negli iperspazi. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 158-165 (1889)].

## 2004. D 5 c β.

VOLTERRA (Vito). Delle variabili complesse negli iperspazi. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 291-299 (1889)].

## 2005. D 5 c β.

VOLTERRA (Vito). Sulle funzioni coniugate. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 599-611 (1889)].

2006. **D 5 c β.**

VOLTERRA (Vito). Sulle funzioni di iperspazi e sui loro parametri differenziali.  
 [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 630-640 (1889)].

**D 5 d.** (*Vedi* n° 1994).**D 6 c.** (*Vedi* n° 1915).2007. **D 6 c α, M' 3 h.**

BELLAVITIS (Giusto). Sviluppo in serie di funzioni implicite, e rami infiniti  
 delle curve algebriche. [M. A. L. R., s. III, v. V, pp. 43-49 (1879-80)].

2008. **D 6 e.**

MAGGI (Gian Antonio). Sulla storia delle funzioni cilindriche. [T. A. L. R., s. III,  
 v. IV, pp. 259-263 (1879-80)].

2009. **D 6 g.**

SCHLAEFLI (Ludovicò). Verbesserungen und Zusätze zu den Bemerkungen über  
 die Lamé'schen Functionen. (Collectanea mathematica in Memoriam D. Cheli-  
 ni, p. 277). [M. A. L. R., s. IV, v. IV, pp. 37-44 (1887)].

2010. **E 3.**

PINCHERLE (Salvatore). Sopra certi integrali definiti. [R. A. L. R., s. IV, v. IV,  
 1<sup>o</sup> sem., pp. 100-104 (1888)].

2011. **E 5.**

VOLPICELLI (Paolo). Determinazione di alcuni integrali definiti. [N. L. A.,  
 t. XV, pp. 143-149 (1861-62)].

**E 5.** (*Vedi* n° 2331, 2332).2012. **F 5.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulla origine di talune equazioni differenziali lineari.  
 [T. A. L. R., s. III, v. VI, pp. 42-47 (1881-82)].

2013. **F 5 a.**

BRIOSCHI (Francesco). Su di alcune formole nella teorica delle funzioni ellit-  
 tiche. [T. A. L. R., s. III, v. II, pp. 115-118 (1877-78)].

2014. **F 5 a.**

PITTARELLI (Giulio). Intorno alla trasformazione del differenziale ellittico effettuata per mezzo della rappresentazione tipica delle forme binarie di 3<sup>o</sup> e 4<sup>o</sup>  
 grado. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 703-705 (1888)].

2015. **F 5 d.**

SMITH (Henry J. Stephen). Sur les équations modulaires. (Comunicazione del  
 Socio Cremona). [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 68-69 (1876-77)].

2016. **F 5 d, F 7 a β, I 13.**

SMITH (Henry J. Stephen). Mémoire sur les équations modulaires. [M. A. L. L., v. I, s. III, pp. 136-149 (1876-77)].

2017. **F 5 d.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulla equazione modulare dell'ottavo grado. [T. A. L. L., s. III, v. III, pp. 45-47 (1878-79)].

2018. **F 5 d.**

KLEIN (Felice). Sulla risolvente di 11° grado dell'equazione modulare di 17° grado. [T. A. L. R., s. III, v. III, pp. 177-178 (1878-79)].

2019. **F 5 d.**

BRIOSCHI (Francesco). Sopra una proprietà della ridotta dell'equazione modulare di ottavo grado. I. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 514-516 (1884-85)].

2020. **F 5 d.**

BRIOSCHI (Francesco). Sopra una proprietà della ridotta della equazione modulare dell'ottavo grado. II. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 583-586 (1884-85)].

**F 7 a β.** (*Vedi* n° 2016).

2021. **F 8 b.**

MAINARDI (Gaspare). Pensieri intorno a vari argomenti. II. Su la risoluzione delle equazioni algebriche. [N. L. A., t. XX, pp. 160-163 (1866-67)].

2022. **F 8 b.**

BRIOSCHI (Francesco). Sopra alcuni recenti risultati ottenuti dal sig. Klein nella risoluzione delle equazioni del quinto grado. [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 31-34 (1876-77)].

2023. **F 8 f, C 2 d.**

CATALAN (Eugène). Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques. [N. L. A., t. XX, pp. 171-180 (1866-67)].

2024. **F 8 h.**

PADOVA (Ernesto). Una nuova applicazione della teoria delle funzioni ellittiche alla meccanica. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1° sem., pp. 507-509 (1888)].

2025. **G 2 b α.**

VOLTERRA (Vito). Sopra una proprietà di una classe di funzioni trascendenti. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2° sem., pp. 211-214 (1885-86)].

2026. **G 3 a.**

BRIOSCHI (Francesco). Le relazioni algebriche fra le funzioni iperellittiche del primo ordine. [T. A. L. R., s. III, v. VII, pp. 137-140 (1882-83)].

2027. **G 3 a.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulle funzioni sigma iperellittiche. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 1° sem., pp. 245-250 (1887)].

2028. **G 3 a.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulle funzioni sigma iperellittiche. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. III, 1<sup>o</sup> sem., pp. 311-315 (1887)].

2029. **G 3 a.**

BRIOSCHI (Francesco). Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni iperellittiche a due variabili. I. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. IV, 2<sup>o</sup> sem., pp. 341-347 (1888)].

2030. **G 3 a.**

BRIOSCHI (Francesco). Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni iperellittiche a due variabili. II. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. IV, 2<sup>o</sup> sem., pp. 429-436 (1888)].

2031. **G 3 i.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulla espressione per serie delle funzioni iperellittiche a due variabili. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 199-203 (1885-86)].

2032. **G 3 i.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulla espressione per serie delle funzioni iperellittiche a due variabili. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 215-221 (1885-86)].

2033. **G 3 i.**

BRIOSCHI (Francesco). Sullo sviluppo in serie delle funzioni sigma iperellittiche. [*M. A. L. R.*, s. IV, v. VI, pp. 471-484 (1889)].

2034. **G 4 a, M<sup>1</sup> 6 k α.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulla bisezione delle funzioni iperellittiche di prima specie, e sul problema geometrico corrispondente. [*A. A. L. R.*, t. XXIV, pp. 47-48 (1870-71)].

2035. **G 4 b.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulla trasformazione delle funzioni iperellittiche del primo ordine. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. I, pp. 315-318 (1884-85)].

2036. **G 4 b.**

BRIOSCHI (Francesco). Le equazioni modulari nella trasformazione del terzo ordine delle funzioni iperellittiche a due variabili. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. I, pp. 769-773 (1884-85)].

2037. **G 4 b.**

BRIOSCHI (Francesco). I nuovi moduli per le funzioni iperellittiche a due variabili. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 159-164 (1885-86)].

2038. **G 5 a.**

MASCHKE (H.). La risoluzione della equazione di sesto grado. (Estratto di una lettera al Socio Brioschi). [*R. A. L. R.*, s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 181-182 (1888)].

2039. **G 5 a.**

BRIOSCHI (Francesco). Osservazioni sulla precedente comunicazione. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 183-184 (1888)].

2040. **G 6 a.**

BIANCHI (Luigi). Sulle superficie Fuchsiane. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 2<sup>o</sup> sem., pp. 161-165 (1888)].

2041. **H 2 b.**

CASORATI (Felice). Nuova teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali di primo ordine e secondo grado tra due variabili. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 160-167 (1875-76)].

2042. **H 2 b.**

CASORATI (Felice). Nota concernente la teoria delle soluzioni singolari delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e secondo grado. [M. A. L. R., s. III, v. III, pp. 271-276 (1878-79)].

2043. **H 2 c α.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sull'equazione differenziale ellittica. [T. A. L. R., s. III, v. IV, pp. 49-50 (1879-80)].

2044. **H 2 c β.**

CASORATI (Felice). Ricerche sulle equazioni differenziali a primitiva generale algebrica. [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 185-189 (1876-77)].

2045. **H 2 c β.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sull'equazione differenziale ellittica. [M. A. L. R., s. III, v. V, pp. 50-57 (1879-80)].

2046. **H 2 c β.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Intorno ad un'applicazione della teoria delle forme binarie quadratiche all'integrazione dell'equazione differenziale ellittica. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 653-657 (1884-85)].

2047. **H 4.**

BESSO (Davide). Alcune proposizioni sulle equazioni differenziali lineari. [M. A. L. R., s. III, v. X, pp. 252-258 (1880-81)].

2048. **H 4.**

BESSO (Davide). Sul prodotto di più soluzioni particolari d'un'equazione differenziale lineare ed omogenea, e specialmente sul prodotto di due soluzioni particolari dell'equazione differenziale lineare ed omogenea del terz'ordine. [M. A. L. R., s. III, v. XIV, pp. 3-13 (1882-83)].

2049. **H 4 e.**

VOLTERRA (Vito). Sulle equazioni differenziali lineari. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 1<sup>o</sup> sem., pp. 393-396 (1887)].

2050. **H 4 g.**

CASORATI (Felice). Sulle equazioni differenziali lineari. [T. A. L. R., s. III, v. VI, pp. 121-124 (1881-82)].

2051. **H 4 i, H 5 j a.**

BESSO (Davide). Di alcune proprietà dell'equazione differenziale lineare, non omogenea del second'ordine. [M. A. L. R., s. III, v. XIV, pp. 40-45 (1882-83)].

2052. **H 5 c.**

BRIOSCHI (Francesco). Sopra una classe di equazioni differenziali integrabili per funzioni ellittiche. [T. A. L. R., s. III, v. IV, pp. 241-246 (1879-80)].

2053. **H 5 d a.**

BIGIAVI (Carlo). Sulle equazioni differenziali lineari. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 651-657 (1889)].

2054. **H 5 f**

BESSO (Davide). Intorno ad un'equazione differenziale ipergeometrica. [T. A. L. R., s. III, v. VII, pag. 230 (1882-83)].

2055. **H 5 f**

BESSO (Davide). Sopra una classe di equazioni del sesto grado risolubili per serie ipergeometriche. [M. A. L. R., s. III, v. XIV, pp. 30-39 (1882-83)].

2056. **H 5 f, A 3.**

BESSO (Davide). Sull'equazione del quinto grado. [M. A. L. R., s. III, v. XIX, pp. 232-244 (1883-84)].

2057. **H 5 f a.**

PINCERLE (Salvatore). Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. I. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 694-700 (1888)].

2058. **H 5 f a.**

PINCERLE (Salvatore). Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. II. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 792-799 (1888)].

**H 5 f a.** (*Vedi* n° 1919).2059. **H 5 j.**

BESSO (Davide). Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del quart'ordine, integrabili per serie ipergeometriche. [M. A. L. R., s. III, v. XIX, pp. 245-250 (1883-84)].

2060. **H 5 j.**

BESSO (Davide). Di una classe d'equazioni differenziali lineari del terz'ordine, integrabili per serie ipergeometriche. [M. A. L. R., s. III, v. XIX, pp. 251-252 (1883-84)].

## 2061. H 5 j.

BESSO (Davide). Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del quart'ordine e sull'equazione del quinto grado. I. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 183-186 (1884-85)].

## 2062. H 5 j.

BESSO (Davide). Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del quart'ordine e sull'equazione del quinto grado. II. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 233-237 (1884-85)].

## 2063. H 5 j a.

BESSO (Davide). Di alcune proprietà dell'equazione differenziale lineare ed omogenea del second'ordine e di alcune equazioni algebriche. [M. A. L. R., s. III, v. XIV, pp. 14-29 (1882-83)].

## 2064. H 5 j z.

BESSO (Davide). Sul prodotto di due soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine. [M. A. L. R., s. III, v. XIX, pp. 219-231 (1883-84)].

## 2065. H 5 j a.

BESSO (Davide). Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del second'ordine e sull'equazione del quinto grado. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 593-597 (1885-86)].

**H 5 j a.** (*Vedi* n° 2051).

## 2066. H 6 a.

VOLPICELLI (Paolo). Sulla integrazione delle equazioni differenziali di primo grado ed ordine, a tre variabili. [N. L. A., t. I, pp. 108-124 (1847-48)].

## 2067. H 6 b.

BIANCHI (Luigi). Sui sistemi di equazioni lineari ai differenziali totali. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 312-323 (1889)].

## 2068. H 7.

FAVERO (Giovanni Battista). De æquationum differentialium partialium naturæ disquisitiones quædam analyticæ. [M. A. L. R., s. III, v. VIII, pp. 217-239 (1879-80)].

## 2069. H 7 a.

RICCI (Gregorio). Sui sistemi di integrali indipendenti di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1<sup>o</sup> ordine. I. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2<sup>o</sup> sem., pp. 119-122 (1885-86)].

## 2070. H 7 a.

RICCI (Gregorio). Sui sistemi di integrali indipendenti di una equazione lineare

ed omogenea a derivate parziali di 1º ordine. II. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2º sem., pp. 190-194 (1885-86)].

## 2071. H 8.

BESSO (Davide). Di alcune equazioni alle derivate parziali del prim'ordine. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 2º sem., pp. 158-160 (1887)].

## 2072. H 9 d.

VOLTERRA (Vito). Integrazione di alcune equazioni differenziali del secondo ordine. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 303-306 (1884-85)].

## 2073. H 9 d.

BIANCHI (Luigi). Sopra una classe di trasformazioni in sè medesime della equazione a derivate parziali:

$$\zeta^2 \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} + \zeta \frac{(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^2} + \frac{1}{1 + p^2 + q^2} = \text{cost.}$$

[R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1º sem., pp. 445-452 (1888)].

## 2074. H 9 d.

TONELLI (Alberto). Sopra una certa equazione differenziale a derivate parziali del 2º ordine. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 2º sem., pp. 384-388 (1888)].

## 2075. H 9 d.

BIANCHI (Luigi). Sulle equazioni lineari a derivate parziali del 2º ordine. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 2º sem., pp. 35-44 (1889)].

## 2076. H 9 f.

TONELLI (Alberto). Sopra una classe di equazioni differenziali a derivate parziali di ordine  $m$ . [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1º sem., pp. 178-185 (1889)].

## 2077. H 9 f.

TONELLI (Alberto). Alcune formule relative a certe equazioni differenziali a derivate parziali di ordine  $m$ . [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1º sem., pp. 508-514 (1889)].

## 2078. H 9 h.

BIANCHI (Luigi). Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali del 2º ordine con due variabili. Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2º sem., pp. 218-223 (1885-86)].

## 2079. H 9 h.

BIANCHI (Luigi). Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali del 2º ordine con due variabili. Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2º sem., pp. 237-241 (1885-86)].

**2080. H 9 h.**

BIANCHI (Luigi). Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali del 2º ordine a due variabili. Nota III. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2º sem., pp. 307-310 (1885-86)].

**H 11 c.** (*Vedi* n° 2340).

**2081. H 12 a, H 12 b.**

CASORATI (Felice). Il calcolo delle differenze finite interpretato e accresciuto di nuovi teoremi, a sussidio principalmente delle odiere ricerche basate sulla variabilità complessa. [M. A. L. R., s. III, v. V, pp. 195-208 (1879-80)].

**2082. H 12 b.**

BESSO (Davide). Di alcune proprietà delle equazioni lineari omogenee alle differenze finite del 2º ordine. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 381-383 (1884-85)].

**2083. H 12 g.**

MAINARDI (Gaspare). Pensieri intorno a vari argomenti. V. Integrazione delle equazioni lineari a differenze finite. [N. L. A., t. XX, pp. 167-169 (1866-67)].

**H 12 h.** (*Vedi* n° 2081).

**2084. I 2, I 13 f.**

VOLPICELLI (Paolo). Alcune ricerche relative alla teorica dei numeri. [N. L. A., t. VI, pp. 77-119 (1852-53)].

**2085. I 2.**

HENRY (Charles). Sur quelques propositions inédites de Fermat. [T. A. L. R., s. III, v. VII, pp. 39-40 (1882-83)].

**I 3 a.** (*Vedi* n° 2086).

**I 3 b.** (*Vedi* n° 1914).

**2086. I 7 b, I 3 a.**

BELLAVITIS (Giusto). Sulla risoluzione delle congruenze numeriche, e sulle tavole che danno i logaritmi (indici) degli interi rispetto ai vari moduli. [M. A. L. R., v. I, s. III, pp. 778-800 (1876-77)].

**2087. I 10.**

VOLPICELLI (Paolo). Sugli spezzamenti diversi che può subire un dato numero, tutti ad una stessa legge di partizione subordinati. [N. L. A., t. X, pp. 43-51; 122-131 (1856-57)].

**2088. I 11.**

CESÀRO (Ernesto). Intorno a taluni determinanti aritmetici. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 709-711 (1884-85)].

## 2089. I 11.

CESÀRO (Ernesto). Nuovo studio di determinanti aritmetici. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 711-715 (1884-85)].

## 2090. I 11.

CESÀRO (Ernesto). Formes algébriques à liens arithmétiques. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2<sup>o</sup> sem., pp. 56-61 (1885-86)].

## 2091. I 11.

CESÀRO (Ernesto). Sur les systèmes de nombres entiers. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 457-462 (1888)].

## 2092. I 11 c.

CESÀRO (Ernesto). Sur les lois asymptotiques des nombres. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 452-457 (1888)].

## 2093. I 12.

FRATTINI (Giovanni). Estensione ed inversione d'un teorema d'aritmetica. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 132-135 (1885-86)].

I 12. (*Vedi* n° 2118).

I 13. (*Vedi* n° 2016).

I 13 b α. (*Vedi* n° 2103).

## 2094. I 13 b α.

VOLPICELLI (Paolo). Sulla legge dello spezzamento in due quadrati, praticato su qualsiasi potenza di qualunque numero, similmente spezzabile una sol volta. [N. L. A., t. III, pp. 1-6 (1849-50)].

## 2095. I 13 b α.

VOLPICELLI (Paolo). Dimostrazione delle formule date dal celebre Gauss, per determinare in quante somme, ognuna di due quadrati, può spezzarsi un intero. [N. L. A., t. IV, pp. 22-31 (1850-51)].

## 2096. I 13 b α.

VOLPICELLI (Paolo). Alcune conseguenze delle formule di Gauss, dimostrate nella sessione precedente. [N. L. A., t. IV, pp. 71-81 (1850-51)].

## 2097. I 13 b α, I 19 a.

VOLPICELLI (Paolo). Nuova generale soluzione della

$$x^2 + y^2 = z^2$$

e sue conseguenze. [N. L. A., t. IV, pp. 124-140; 346-377 (1850-51)].

## 2098. I 13 b α.

VOLPICELLI (Paolo). Sullo spezzamento numerico in somme ognuna di due quadrati. [N. L. A., t. IV, pp. 508-510 (1850-51)].

2099. I 13 b z.

VOLPICELLI (Paolo). Soluzione algebrica della:

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^k,$$

essendo  $k$  un intero qualunque. [N. L. A., t. V, pp. 315-352 (1851-52)].

2100. I 13 b z.

VOLPICELLI (Paolo). Rettificazione delle formule per assegnare il numero delle somme, ognuna di due quadrati, nelle quali un intero può spezzarsi. [N. L. A., t. V, pp. 528-533 (1851-52)].

2101. I 13 f.

RICHAUD (Casimir). Sur la résolution des équations :

$$x^2 - Ay^2 = \pm 1.$$

[N. L. A., t. XIX, pp. 177-182 (1865-66)].

I 13 f. (Vedi n° 2084, 2107).

2102. I 13 c.

BIANCHI (Luigi). Sulle forme quadratiche a coefficienti e a indeterminate complesse. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1º sem., pp. 589-599 (1889)].

2103. I 19 a, I 13 b z.

VOLPICELLI (Paolo). Sulla generale soluzione in interi delle:

$$x^2 + y^2 = \zeta \quad x^2 + y^2 = \chi^2.$$

[N. L. A., t. III, pp. 17-26 (1849-50)].

2104. I 19 c, A 1 c.

GENOCCHI (Angelo). Intorno ad alcune somme di cubi [N. L. A., t. XIX, pp. 43-50 (1865-66)].

2105. I 19 c.

RICHAUD (Casimir). Sur un problème indéterminé. [N. L. A., t. XIX, pp. 183-186 (1865-66)].

2106. I 19 c, A 1 c.

CATALAN (Eugène). Note sur un problème d'analyse indéterminée. [N. L. A., t. XX, pp. 1-4 (1866-67)].

2107. I 19 c, I 13 f.

CATALAN (Eugène). Rectification et addition à la « Note sur un problème d'analyse indéterminée ». [N. L. A., t. XX, pp. 77-80 (1866-67)].

2108. I 19 c, A 1 c.

RICHAUD (Casimir). Note sur la résolution de l'équation:

$$x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \dots + [x+(n-1)r]^3 = y^6.$$

[N. L. A., t. XX, pp. 91-110 (1866-67)].

**2109. I 19 c.**

FRATTINI (Giovanni). Intorno ad un teorema di Lagrange. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 136-142 (1884-85)].

**2110. I 23 a, D 2 d.**

PINCERLE (Salvatore). Alcuni teoremi sulle frazioni continue. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 640-643 (1889)].

**2111. J 2 e.**

PIZZETTI (Paolo). Un teorema relativo all'errore medio di una funzione di quantità determinate dall'esperienza. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 597-601 (1885-86)].

**2112. J 2 e.**

PIZZETTI (Paolo). Sulla compensazione delle osservazioni secondo il metodo dei minimi quadrati. I. [R. A. L. R., s. IV, v. III; 2<sup>o</sup> sem., pp. 230-235 (1887)].

**2113. J 2 e.**

PIZZETTI (Paolo). Sulla compensazione delle osservazioni secondo il metodo dei minimi quadrati. II. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 2<sup>o</sup> sem., pp. 288-293 (1887)].

**2114. J 2 e.**

PIZZETTI (Paolo). Sopra una generalizzazione del principio della media aritmetica. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 186-191 (1889)].

**2115. J 2 e.**

PIZZETTI (Paolo). Sopra una certa formula esprimente la probabilità degli errori di osservazione. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 191-199 (1889)].

**2116. J 2 e.**

PIZZETTI (Paolo). Sopra il calcolo dell'errore medio di un sistema di osservazioni. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 740-744 (1889)].

**2117. J 2 e.**

PUCCI (Enrico). Sul modo di ricercare la vera espressione delle leggi della natura dalle curve empiriche. [M. A. L. R., s. IV, v. VI, pp. 316-327 (1889)].

**2118. J 4, I 12.**

FRATTINI (Giovanni). Intorno alla generazione dei gruppi d'operazioni e ad un teorema d'Aritmetica. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 16-19 (1885-86)].

**2119. J 4.**

CESÀRO (Ernesto). Intorno a taluni gruppi di operazioni. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2<sup>o</sup> sem., pp. 35-39 (1885-86)].

## 2120. J 4 a.

FRATTINI (Giovanni). Intorno ad alcune proposizioni della teoria delle sostituzioni. [*M. A. L. R.*, s. III, v. XVIII, pp. 487-513 (1882-83)].

## 2121. J 4 a.

CAPELLI (Alfredo). Sopra la composizione dei gruppi di sostituzioni. [*M. A. L. R.*, s. III, v. XIX, pp. 262-272 (1883-84)].

## 2122. J 4 a.

FRATTINI (Giovanni). I gruppi a  $k$  dimensioni. [*T. A. L. R.*, s. III, v. VIII, pp. 260-264 (1883-84)].

## 2123. J 4 a.

FRATTINI (Giovanni). Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni. I. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. I, pp. 281-285 (1884-85)].

## 2124. J 4 a.

FRATTINI (Giovanni). Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni. II. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. I, pp. 455-456 (1884-85)].

## 2125. J 4 a a.

FRATTINI (Giovanni). I gruppi transitivi di sostituzioni dell'istesso ordine e grado. [*M. A. L. R.*, s. III, v. XIV, pp. 143-172 (1882-83)].

## 2126. J 4 c.

SPINA (Carlo). Sul numero dei valori delle funzioni algebriche razionali le quali contengono un dato numero di lettere; e come si possano formare le funzioni algebriche razionali per le quali esiste un dato numero di valori quando si permutano le lettere fra loro. [*N. L. A.*, t. XXI, pp. 182-238 (1868)].

## 2127. K 6 b, O 6 r a.

TORTOLINI (Barnaba). Sopra un nuovo sistema di variabili introdotte dal sig. Ossian Bonnet nello studio delle proprietà delle superficie curve. [*N. L. A.*, t. XXII, pp. 172-187 (1868-69)].

## 2128. K 11 e, K 18 g, K 12 b β.

LUCAS (Édouard). Sur un principe fondamental de géométrie et de trigonométrie. [*M. A. L. R.*, s. III, v. II, pp. 449-456 (1877-78)].

## 2129. K 14 c.

UZIELLI (Gustavo). Studi di Cristallografia teorica. [*M. A. L. R.*, v. I, s. III, pp. 427-480 (1876-77)].

**K 18 g.** (*Vedi* n° 2128).

## 2130. L' 1 o, Q 4 a.

VERONESE (Giuseppe). Nuovi teoremi sull'*Hexagrammum Mysticum*. [*M. A. L. R.*, v. I, s. III, pp. 649-703 (1876-77)].

2131. L<sup>1</sup> 1 c, M<sup>2</sup> 3 h β.

CREMONA (Luigi). Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal. [M. A. L. R., s. III, v. I, pp. 854-874 (1876-77)].

L<sup>1</sup> 1 c. (Vedi n° 2165),

L<sup>1</sup> 6 a. (Vedi n° 2133).

2132. L<sup>1</sup> 15 f, M<sup>1</sup> 6 i.

TORTOLINI (Barnaba). Sull'equazione della curva piana, luogo geometrico di un punto tale, dal quale condotte due tangenti ad un'ellissi data, l'angolo delle medesime sia costante. [N. L. A., t. I, pp. 125-129 (1847-48)].

2133. L<sup>1</sup> 15 f, L<sup>1</sup> 6 a.

TORTOLINI (Barnaba). Soluzione di due problemi di geometria analitica, proposti negli Annali di Matematica del sig. Terquem nei fasc. di maggio 1850 pag. 181 e di febbrajo 1850, pag. 55. [N. L. A., t. III, pp. 55-60 (1849-50)].

2134. L<sup>1</sup> 16 a.

CAVALIERI SAN BERTOLO (Nicola). Soluzione di un problema di geometria analitica, dalla quale si deduce una notevole proprietà dell'iperbole apolloniana. [N. L. A., t. XIX, pp. 101-107 (1865-66)].

2135. L<sup>1</sup> 17, P 2 d.

BATTAGLINI (Giuseppe). Nota intorno alla conica rispetto alla quale due coniche date sono polari reciproche. [A. A. L. R., t. XXV, pp. 195-202 (1871-72)].

2136. L<sup>1</sup> 17 a, Q 1.

BATTAGLINI (Giuseppe). Nota sul rapporto armonico sezonale e tangenziale delle coniche. [A. A. L. R., t. XXVI, pp. 566-576 (1873)].

2137. L<sup>1</sup> 19.

VOLPICELLI (Paolo). Ricerche analitiche relative al luogo geometrico dei punti di tangenza, fra uno, e due sistemi di parallele, con una serie di coniche omofocali. [N. L. A., t. XIX, pp. 26-37 (1865-66)].

2138. L<sup>1</sup> 19.

VOLPICELLI (Paolo). Ricerche analitiche relative al geometrico luogo, tanto dei punti di tangenza fra uno, e due sistemi di parallele, con una serie di coniche omofocali; quanto dei punti di intersecazione delle tangenti parallele di un sistema colle rispettive dell'altro. [N. L. A., t. XIX, pp. 53-82; 149-171; 219-243; 268-305 (1865-66)].

2139. L<sup>2</sup> 2 e.

CAVALIERI SAN BERTOLO (Nicola). Intorno alle curve piane, che possono essere comprese nella superficie del cono. [N. L. A., t. XII, pp. 173-180 (1858-59)].

Rend. Circ. Matem., t. IX, parte 2<sup>a</sup>.—Stampato il 28 ottobre 1895. 10

**L<sup>2</sup> 10 a.** (*Vedi* n° 2140).

**2140. L<sup>2</sup> 12, L<sup>2</sup> 10 a.**

TORTOLINI (Barnaba). Sulla determinazione della linea geodetica descritta sulla superficie di un ellissoide a tre assi disuguali secondo il metodo del Cav. Jacob, da esso dato nelle sue lezioni di Meccanica all'Università di Koenigsberg. [N. L. A., t. IV, pp. 287-324 (1850-51)].

**L<sup>2</sup> 17 c.** (*Vedi* n° 2223).

**L<sup>2</sup> 17 g.** (*Vedi* n° 2250).

**2141. M<sup>1</sup> 1, M<sup>1</sup> 4 d.**

BERTINI (Eugenio). Una proprietà delle curve di ordine  $n$  con un punto  $(n-2)^{\text{plo}}$ . [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 92-95 (1876-77)].

**2142. M<sup>1</sup> 1 b.**

GUCCIA (Giovanni Battista). Sulla classe e sul numero dei flessi di una curva algebrica dotata di singolarità qualunque. [R. A. L. R. s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 18-25 (1889)].

**2143. M<sup>1</sup> 1 c, M<sup>1</sup> 5 g.**

DE PAOLIS (Riccardo). Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari. [M. A. L. R., s. IV, v. III, pp. 265-280 (1885-86)].

**2144. M<sup>1</sup> 2 a.**

PITTARELLI (Giulio). Studio algebrico-geometrico intorno alla corrispondenza (1, 2). [M. A. L. R., s. IV, v. III, pp. 375-400 (1885-86)].

**2145. M<sup>1</sup> 2 a, M<sup>1</sup> 5 a.**

PITTARELLI (Giulio). Le cubiche con un punto doppio e la corrispondenza (1, 2). [M. A. L. R., s. IV, v. III, pp. 401-416 (1885-86)].

**2146. M<sup>1</sup> 2 a α.**

DE PAOLIS (Riccardo). Sulle involuzioni proiettive. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2<sup>o</sup> sem., pp. 335-337 (1885-86)].

**2147. M<sup>1</sup> 2 c α.**

CASTELNUOVO (Guido). Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 2<sup>o</sup> sem., pp. 130-133 (1889)].

**2148. M<sup>1</sup> 2 d, M<sup>1</sup> 5 e β.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sui punti sestatici di una curva qualunque. Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 2<sup>o</sup> sem., pp. 238-246 (1888)].

**M<sup>1</sup> 2 g.** (*Vedi* n° 2252).

**M<sup>1</sup> 3 h.** (*Vedi* n° 2007).

**M<sup>1</sup> 4 d.** (*Vedi* n° 2141).

**M<sup>1</sup> 5 a.** (*Vedi* n° 2145).

**M<sup>1</sup> 5 e β.** (*Vedi* n° 2148).

2149. **M<sup>1</sup> 5 g.**

CAPORALI (Ettore). Teoremi sulle curve di terz'ordine. [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 232-236 (1876-77)].

**M<sup>1</sup> 5 g.** (*Vedi* n° 2143).

2150. **M<sup>1</sup> 5 i.**

CAPORALI (Ettore). Teoremi sui fasci di curve del terz'ordine. [T. A. L. R., s. III, v. I, pag. 236 (1876-77)].

2151. **M<sup>1</sup> 5 i γ.**

KANTOR (S.). Una semplice generazione della curva Jacobiana di una rete di curve del 3<sup>o</sup> ordine. [T. A. L. R., s. III, v. III, pp. 93-95 (1878-79)].

**M<sup>1</sup> 6 i.** (*Vedi* n° 2132).

**M<sup>1</sup> 6 k α.** (*Vedi* n° 2034).

, 2152. **M<sup>1</sup> 6 l, A 4 d.**

BRIOSCHI (Francesco). Sopra una classe di curve del 4<sup>o</sup> ordine. [T. A. L. R., s. III, v. VIII, pp. 164-168 (1883-84)].

**M<sup>1</sup> 6 l.** (*Vedi* n° 2236).

2153. **M<sup>1</sup> 1 a.**

VANĚČEK (M. N.). Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par des faisceaux de surfaces. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 130-133 (1884-85)].

2154. **M<sup>1</sup> 1 a.**

JUNG (Giuseppe). Sulle superficie generate da due sistemi Cremoniani reciproci di grado  $m$ . [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 762-767 (1884-85)].

2155. **M<sup>1</sup> 1 a.**

JUNG (Giuseppe). Sui sistemi Cremoniani reciproci di grado  $m$ . Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 773-774 (1884-85)].

2156. **M<sup>1</sup> 1 a.**

JUNG (Giuseppe). Sui sistemi Cremoniani reciproci di grado  $m$ . Nota III. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 810-812 (1884-85)].

2157. **M<sup>1</sup> 1 a.**

JUNG (Giuseppe). Sulle superficie generate da tre sistemi deducibili l'uno dall'altro mediante trasformazioni birazionali. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 85-89 (1885-86)].

2158. **M<sup>2</sup> 1 b.**

GUCCIA (Giovanni Battista). Su una proprietà delle superficie algebriche dotate di singolarità qualunque. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 349-353 (1889)].

2159. **M<sup>2</sup> 1 b, P 4 g.**

GUCCIA (Giovanni Battista). Sulla intersezione di tre superficie algebriche in un punto singolare e su una questione relativa alle trasformazioni razionali nello spazio. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 456-461 (1889)].

2160. **M<sup>2</sup> 1 b.**

GUCCIA (Giovanni Battista). Nuovi teoremi sulle superficie algebriche dotate di singolarità qualunque. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 490-497 (1889)].

2161. **M<sup>2</sup> 2 h.**

PIERI (Mario). Sulle normali doppie di una superficie algebrica. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2<sup>o</sup> sem., pp. 40-42 (1885-86)].

2162. **M<sup>2</sup> 3.**

DE PAOLIS (Riccardo). Ricerche sulla superficie del terzo ordine. [M. A. L. R., s. III, v. X, pp. 123-160 (1880-81)].

2163. **M<sup>2</sup> 3 b.**

BRIOSCHI (Francesco). Sopra una proprietà dei piani tritangenti ad una superficie cubica. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 257-259 (1875-76)].

**M<sup>2</sup> 3 h β.** (*Vedi* n° 2131).

**M<sup>2</sup> 4 d.** (*Vedi* n° 2246).

2164. **M<sup>2</sup> 4 f, M<sup>2</sup> 9<sup>1/2</sup>e.**

CHIZZONI (Francesco). Sopra una certa famiglia di superficie che comprende una nuova famiglia di ciclidi. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 476-482 (1885-86)].

2165. **M<sup>2</sup> 4 k, L<sup>1</sup> 1 e, Q 4 a.**

CAPORALI (Ettore). Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di Kummer. [M. A. L. R., s. III, v. II, pp. 791-810 (1877-78)].

**M<sup>2</sup> 6.** (*Vedi* n° 2254).

2166. **M<sup>2</sup> 7 a.**

SEGRE (Corrado). Intorno alla geometria su una rigata algebrica. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 2<sup>o</sup> sem., pp. 3-6 (1887)].

2167. **M<sup>2</sup> 7 c β, M<sup>2</sup> 7 b.**

CHIZZONI (Francesco). Sulle superficie e sulle linee che si ottengono come luogo o come involuppo delle rette congiungenti i punti corrispondenti di due curve omografiche piane. [M. A. L. R., s. III, v. III, pp. 69-116 (1878-79)].

2168. **M<sup>2</sup> 8 b.**

VISALLI (Pietro). Sopra una serie di superficie rappresentabili punto per punto sopra un piano. Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2<sup>o</sup> sem., pp. 80-84 (1885-86)].

2169. **M<sup>2</sup> 8 b.**

VISALLI (Pietro). Sopra una serie di superficie rappresentabili punto per punto sopra un piano. Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2<sup>o</sup> sem., pp. 84-87 (1885-86)].

2170. **M<sup>2</sup> 9 b, R 5 a.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Nota intorno ad una superficie di 8<sup>o</sup> ordine. [R. A. L. R., s. II, v. II, pp. 244-249 (1874-75)].

**M<sup>2</sup> 9 e.** (*Vedi* n° 2164).

**M<sup>3</sup> 1 a.** (*Vedi* n° 2240).

2171. **M<sup>3</sup> 2 d.**

PIERI (Mario). Sulle normali doppie di una curva gobba algebrica. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 327-329 (1885-86)].

**M<sup>3</sup> 5 e.** (*Vedi* n° 2220, 2249).

2172. **M<sup>3</sup> 6 d, T 6.**

VOLPICELLI (Paolo). Ricerche analitiche sul bifilare tanto magnetometro, quanto elettrometro; sulla curva bifilare; e sulla misura del magnetismo terrestre. [N. L. A., t. XVII, pp. 331-336; t. XVIII, pp. 1-16, 279-315 (1863-64; 1864-65)].

**M<sup>4</sup>.** (*Vedi* n° 2192).

2173. **M<sup>4</sup> a, O 2 p.**

FABRI (Ruggiero). Sulle curve cicloidali. [N. L. A., t. X, pp. 225-235 (1856-57)].

2174. **M<sup>4</sup> a, O 2 p.**

FABRI (Ruggiero). Sulla curvatura delle linee cicloidali. [N. L. A., t. X, pp. 387-392 (1856-57)].

2175. **M<sup>4</sup> a, O 2 p.**

FABRI (Ruggiero). Alcuni teoremi riguardanti la rettificazione e quadratura delle cicloidali. [N. L. A., t. XI, pp. 399-404 (1857-58)].

2176. **N<sup>1</sup> 1 b, N<sup>2</sup> 1 c, Q 1.**

D'OIDIO (Enrico). Alcune proprietà metriche dei complessi e delle congruenze lineari in Geometria proiettiva. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 260-268 (1875-76)].

2177. **N<sup>1</sup> 1 b, P 6 d.**

CREMONA (Luigi). Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 285-302 (1875-76)].

2178. N<sup>o</sup> 1 b.

PORCHIESI (Augusto). Una rappresentazione del complesso lineare sullo spazio ordinario. [M. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 610-621 (1884-85)].

2179. N<sup>o</sup> 1 c. Q1.

D'ovidio (Enrico). Sulle reti di complessi lineari nella Geometria metrico-proiettiva. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 561-581 (1875-76)].

2180. N<sup>o</sup> 1 c. Q1.

D'ovidio (Enrico). Le serie triple e quadruple di complessi lineari nella Geometria metrico-proiettiva. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 723-746 (1875-76)].

2181. N<sup>o</sup> 1 c.

DE PAOLIS (Riccardo). Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari. [M. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 205-231 (1884-85)].

2182. N<sup>o</sup> 1 e, N<sup>o</sup> 1 e.

CAPORALI (Ettore). Sui complessi e sulle congruenze di 2<sup>o</sup> grado. [M. A. L. R., s. III, v. II, pp. 749-769 (1877-78)].

2183. N<sup>o</sup> 1 e.

BATTAGLINI (Giuseppe). Sui complessi di secondo ordine. [T. A. L. R., s. III, v. III, pp. 43-44 (1878-79)].

2184. N<sup>o</sup> 1 e.

BATTAGLINI (Giuseppe). Sui complessi di secondo grado. [M. A. L. R., s. III, v. III, pp. 35-44 (1878-79)].

N<sup>o</sup> 1 h. (*Vedi* n<sup>o</sup> 2232).

N<sup>o</sup> 1 c. (*Vedi* n<sup>o</sup> 2176).

N<sup>o</sup> 1 e. (*Vedi* n<sup>o</sup> 2182).

2185. N<sup>o</sup> 1 f.

BERTINI (Eugenio). Sulla congruenza di 2<sup>o</sup> ordine, 6<sup>a</sup> classe e 1<sup>a</sup> specie, dotata soltanto di superficie focale. [T. A. L. R., s. III, v. IV, pp. 30-31 (1879-80)].

2186. N<sup>o</sup> 1 g.

PANNELLI (Marino). Sopra le congruenze generate da due superficie di cui i punti si corrispondono univocamente. [M. A. L. R., s. IV, v. VI, pp. 216-229 (1889)].

2187. N<sup>o</sup> d.

ARMENANTE (A.). Generazione dei connessi di 2<sup>o</sup> ordine e 2<sup>a</sup> classe. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 123-128 (1875-76)].

2188. N<sup>o</sup> 2

LAZZERI (Giulio). Sopra i sistemi lineari di connessi quaternari (1, 1). [M. A. L. R., s. IV, v. IV, pp. 259-272 (1887)].

2189. N<sup>o</sup> 1 b, Q 1.

BATTAGLINI (Giuseppe). Nota sui circoli nella geometria non euclidea. [A. A. L. R., s. II, v. I, pp. 53-61 (1873-74)].

N<sup>o</sup> 2 a. (*Vedi* n<sup>o</sup> 2251, 2255).

## 2190. O 2 b, R 3 c.

FABRI (Ruggiero). Sull'uso de' principii meccanici, nella ricerca delle proprietà geometriche delle curve. [N. L. A., t. VI, pp. 73-76 (1852-53)].

## 2191. O 2 h.

TORTOLINI (Barnaba). Sopra le differenti formole esprimenti i raggi delle due curvature di una linea tracciata sulla superficie di una sfera. [N. L. A., t. IV, pp. 555-568 (1850-51)].

O 2 p. (*Vedi* n<sup>o</sup> 2173, 2174, 2175).

2192. O 2 q, M<sup>4</sup>.

CALLEGARI (Pietro). Equazioni generali ai luoghi geometrici, ed applicazioni. [N. L. A., t. VII, pp. 179-218; 251-274 (1853)].

## 2193. O 3 f, O 5 i a.

GREMIGNI (Michele). La teoria delle sviluppoidi e le superficie che hanno un sistema di linee di curvatura circolari. [M. A. L. R., s. III, v. XV, pp. 3-43 (1882-83)].

## 2194. O 5.

MAINARDI (Gaspare). Sulla teoria generale delle superficie. [N. L. A., t. IV, pp. 591-611 (1850-51)].

## 2195. O 5.

MAINARDI (Gaspare). Pensieri intorno vari argomenti. VI. Su la teorica generale delle superficie. [N. L. A., t. XXIII, pp. 220-229 (1869-70)].

## 2196. O 5 a, O 5 b.

JUNG (Giuseppe). Nuovi teoremi a complemento della regola di Guldin e proprietà della spirale:

$$r = a \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

[T. A. L. R., s. III, v. VII, pp. 97-100 (1882-83)].

O 5 d. (*Vedi* n<sup>o</sup> 2327).

**O 5 i z. (Vedi n° 2193).****2197. O 5 k. O 5 n.**

PUCCI (Enrico). Dell'angolo caratteristico e delle linee caratteristiche di una superficie. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 501-507 (1889)].

**2198. O 5 n.**

REINA (Vincenzo). Di alcune proprietà delle linee caratteristiche. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 881-885 (1889)].

**2199. O 5 p. C 2 h.**

TORTOLINI (Barnaba). Sul valore della curvatura totale di una superficie e sull'uso di questo valore nella determinazione di alcuni integrali definiti duplicates. [N. L. A., t. IV, pp. 53-70 (1850-51)].

**2200. O 5 q. O 6 q.**

PADOVA (Ernesto). Sulla teoria delle coordinate curvilinee. Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 2<sup>o</sup> sem., pp. 369-376 (1888)].

**2201. O 5 q. O 6 q.**

PADOVA (Ernesto). Sulla teoria delle coordinate curvilinee. Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 2<sup>o</sup> sem., pp. 454-461 (1888)].

**2202. O 6 g.**

REINA (Vincenzo). Sugli oricli delle superficie pseudosferiche. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 448-456 (1889)].

**2203. O 6 h. Q 1.**

BIANCHI (Luigi). Sulle superficie d'area minima negli spazi a curvatura costante. [M. A. L. R., s. IV, v. IV, pp. 503-519 (1887)].

**2204. O 6 k. Q 1.**

BIANCHI (Luigi). Sull'applicabilità delle superficie degli spazi a curvatura costante. [M. A. L. R., s. III, v. II, pp. 479-484 (1877-78)].

**2205. O 6 k.**

VOLTERRA (Vito). Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 274-278 (1884-85)].

**2206. O 6 k.**

BIANCHI (Luigi). Sulla equazione a derivate parziali del  $C_{\alpha\beta\gamma}$  nella teoria delle superficie. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 442-445 (1888)].

**2207. O 6 n.**

PIZZETTI (Paolo). Sulle rappresentazioni geografiche conformi. Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 599-605 (1884-85)].

## 2208. O 6 n.

PIZZETTI (Paolo). Sulle rappresentazioni geografiche conformi. Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 628-632 (1884-85)].

## 2209. O 6 p.

BIANCHI (Luigi). Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali. [T. A. L. R., s. III, v. VII, pp. 46-47 (1882-83)].

## 2210. O 6 p.

BIANCHI (Luigi). Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 163-166 (1884-85)].

## 2211. O 6 p.

BIANCHI (Luigi). Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 243-246 (1884-85)].

## 2212. O 6 p.

BIANCHI (Luigi). Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono un sistema di superficie pseudosferiche. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 19-22 (1885-86)].

## 2213. O 6 p.

BIANCHI (Luigi). Sui sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante. [M. A. L. R., s. IV, v. IV, pp. 221-256 (1887)].

O 6 q. (*Vedi* n° 2200, 2201).

O 6 r α. (*Vedi* n° 2127).

O 6 r β. (*Vedi* n° 2327).

## 2214. O 7 a.

BIANCHI (Luigi). Sopra i sistemi doppiamente infiniti di raggi (congruenze). [R. A. L. R., s. IV, v. III, 1<sup>o</sup> sem., pp. 369-370 (1887)].

## 2215. O 8.

CESÀRO (Ernesto). Formole fondamentali per l'analisi intrinseca delle curve. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 2<sup>o</sup> sem., pp. 165-170 (1889)].

## 2216. O 8 d.

GAUTERO (Giacinto). Sul movimento di una superficie che ne tocca costantemente un'altra fissa. [T. A. L. R., s. III, v. IV, pp. 106-109 (1879-80)].

## 2217. P 1, Q 2.

SEGRE (Corrado). Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. [M. A. L. R., s. III, v. XIX, pp. 127-148].

*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 2<sup>a</sup>.—Stampato il 7 novembre 1895. 11

**P 1.** (*Vedi* n° 2248, 2258, 2259).

**2218. P 1 f. Q 1 a.**

DE PAOLIS (Riccardo). Sui fondamenti della Geometria Proiettiva. [M. A. L. R., s. III, v. IX, pp. 489-503 (1880-81)].

**P 2.** (*Vedi* n° 2258, 2259).

**2219. P 2 c.**

HIRST (T. Archer). Sulla correlazione di due piani. [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 86-92 (1876-77)].

**2220. P 2 c. M 5 e.**

MONTESANO (Domenico). Su le correlazioni polari dello spazio, rispetto alle quali una cubica gobba è polare a sé stessa. [M. A. L. R., s. IV, v. III, pp. 105-115 (1885-86)].

**2221. P 2 c.**

VISALLI (Pietro). Sulle correlazioni in due spazi a tre dimensioni. [M. A. L. R., s. IV, v. III, pp. 597-671 (1885-86)].

**2222. P 2 c.**

VISALLI (Pietro). Sulle correlazioni (in due spazi a tre dimensioni) che soddisfanno a dodici condizioni elementari. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 1<sup>o</sup> sem., pp. 118-124 (1887)].

**2223. P 2 d. L 2 17 c.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Nota intorno alla quadrica rispetto alla quale due quadriche date sono polari reciproche tra di loro. [A. A. L. R., t. XXVI, pp. 5-16 (1872-73)].

**P 2 d.** (*Vedi* n° 2135).

**2224. P 4 a.**

LAZZERI (Giulio). Sulle reciprocità birazionali nel piano. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2<sup>o</sup> sem., pp. 61-67 (1885-86)].

**P 4 a.** (*Vedi* n° 2239).

**2225. P 4 g.**

DE PAOLIS (Riccardo). Alcune particolari trasformazioni involutorie dello spazio. Nota I<sup>a</sup>. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 735-742 (1884-85)].

**2226. P 4 g.**

DE PAOLIS (Riccardo). Alcune particolari trasformazioni involutorie dello spazio. Nota II<sup>a</sup>. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 754-758 (1884-85)].

**2227. P 4 g.**

LAZZERI (Giulio). Sulle reciprocità birazionali nello spazio. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2<sup>o</sup> sem., pp. 73-79 (1885-86)].

## 2228. P 4 g.

CHIZZONI (Francesco). Sopra una certa famiglia di superficie che s'incontrano in una trasformazione involutoria di terzo grado nello spazio. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1° sem., pp. 470-476 (1885-86)].

## 2229. P 4 g.

MONTESANO (Domenico). Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette. Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1° sem., pp. 207-215 (1888)].

## 2230. P 4 g.

MONTESANO (Domenico). Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette. Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1° sem., pp. 277-285 (1888)].

## 2231. P 4 g.

MONTESANO (Domenico). Sulle reciprocità birazionali nulle dello spazio. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1° sem., pp. 583-590 (1888)].

2232. P 4 g, N<sup>o</sup> 1 h.

MONTESANO (Domenico). Su la trasformazione involutoria dello spazio che determina un complesso tetraedrale. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1° sem., pp. 497-501 (1889)].

## 2233. P 4 g.

MONTESANO (Domenico). Su le trasformazioni involutorie dello spazio nelle quali ai piani corrispondono superficie di ordine  $n$  con una retta ( $n-2$ )-pla. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 2° sem., pp. 123-130 (1889)].

P 4 g. (Vedi n<sup>o</sup> 2159).

## 2234. P 6 a.

DE PAOLIS (Riccardo). Le trasformazioni piane doppie. [M. A. L. R., s. III, v. I, pp. 511-544 (1876-77)].

## 2235. P 6 a, Q 1.

DE PAOLIS (Riccardo). La trasformazione piana doppia di secondo ordine e la sua applicazione alla geometria non euclidea. [M. A. L. R., s. III, v. II, pp. 31-50 (1877-78)].

2236. P 6 a, M<sup>o</sup> 6 1.

DE PAOLIS (Riccardo). La trasformazione piana doppia di terzo ordine, primo genere, e la sua applicazione alle curve del quarto ordine. [M. A. L. R., s. III, v. II, pp. 851-878 (1877-78)].

## 2237. P 6 a.

DE PAOLIS (Riccardo). Le trasformazioni doppie dello spazio. [M. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 576-608 (1884-85)].

**2238. P 6 a.**

JUNG (Giuseppe). Sulle trasformazioni piane multiple. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2° sem., pp. 302-306 (1885-86)].

**2239. P 6 a, P 4 a.**

JUNG (Giuseppe). Di due trasformazioni multiple associate a ogni trasformazione birazionale. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2° sem., pp. 338-344 (1885-86)].

**2240. P 6 a, M<sup>3</sup> 1 a.**

VISALLI (Pietro). Sulle figure generate da due forme fondamentali di seconda specie fra le quali esiste una corrispondenza multipla ( $1, r$ ) di grado  $n$ . [R. A. L. R., s. IV, v. III, 1° sem., pp. 124-127 (1887)].

**2241. P 6 c.**

CHIZZONI (Francesco). Sopra le involuzioni nel piano. [M. A. L. R., s. III, v. XIX, pp. 301-343 (1883-84)].

**P 6 d.** (*Vedi* n° 2177).

**P 6 g.** (*Vedi* n° 2253).

**2242. Q 1, Q 2.**

D'OVILIO (Enrico). Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante. [M. A. L. R., s. III, v. I, pp. 929-986 (1876-77)].

**Q 1.** (*Vedi* n° 2136, 2176, 2179, 2180, 2189, 2203, 2204, 2235, 2342, 2379).

**2243. Q 1 a.**

VERONESE (Giuseppe). Il continuo rettilineo, e l'assioma V di Archimede. [M. A. L. R., s. IV, v. VI, pp. 603-624 (1889)].

**Q 1 a.** (*Vedi* n° 2218).

**2244. Q 2.**

VERONESE (Giuseppe). Alcuni teoremi sulla geometria a  $n$  dimensioni. Nota I. [T. A. L. R., s. III, v. V, pp. 303-304 (1880-81)].

**2245. Q 2.**

VERONESE (Giuseppe). Alcuni teoremi sulla geometria a  $n$  dimensioni. Nota II. [T. A. L. R., s. III, v. V, pp. 333-338 (1880-81)].

**2246. Q 2, M<sup>3</sup> 4 d.**

VERONESE (Giuseppe). La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e ne lo spazio ordinario. [M. A. L. R., s. III, v. XIX, pp. 344-371 (1883-84)].

**2247. Q 2.**

CASSANI (Pietro). Gli angoli degli spazi lineari. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 133-136 (1884-85)].

**2248. Q 2, P 1.**

SEGRE (Corrado). Sugli spazi fondamentali di un'omografia. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 325-327 (1885-86)].

**2249. Q 2, M<sup>3</sup> 5 e.**

CASSANI (Pietro). Un teorema generale sulle linee normali degli spazi dispari. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 482-484 (1885-86)].

**2250. Q 2, L<sup>2</sup> 17 g.**

BERTINI (Eugenio). Sui fasci di quadriche in uno spazio ad  $n$  dimensioni. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 2<sup>o</sup> sem., pp. 208-211 (1885-86)].

**2251. Q 2, N<sup>4</sup> 2 a.**

PIERI (Mario). Sul principio di corrispondenza in uno spazio lineare qualunque ad  $n$  dimensioni. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 1<sup>o</sup> sem., pp. 196-199 (1887)].

**2252. Q 2, M<sup>1</sup> 2 g.**

SEGRE (Corrado). Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi. [R. A. L. R. s. IV, v. III, 2<sup>o</sup> sem., pp. 149-153 (1887)].

**2253. Q 2, P 6 g.**

ASCHIERI (Ferdinando). Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni. [M. A. L. R., s. IV, pp. 172-180 (1887)].

**2254. Q 2, M<sup>2</sup> 6.**

BORDIGA (Giovanni). La superficie del 6<sup>o</sup> ordine, con dieci rette, nello spazio  $R_4$ ; e le sue proiezioni nello spazio ordinario. [M. A. L. R., s. IV, v. IV, pp. 182-203 (1887)].

**2255. Q 2, N<sup>4</sup> 2 a.**

CASTELNUOVO (Guido). Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio ad  $n$  dimensioni. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 2<sup>o</sup> sem., pp. 71-78 (1889)].

**Q 2.** (*Vedi* n° 2217, 2242).

**2256. Q 3 a.**

TONELLI (Alberto). Osservazioni sulla teoria della connessione. [A. A. L. R., s. II, v. II, pp. 594-601 (1874-75)].

**2257. Q 3 a.**

BORTOLOTTI (Ettore). Sopra un teorema della teoria della connessione. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 2<sup>o</sup> sem., pp. 229-234 (1889)].

2258. **Q 4 a, P 1, P 2.**

VERONESE (Giuseppe). Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e di superficie di 2º ordine. [T. A. L. R., s. III, v. IV, pp. 132-149 (1879-80)].

2259. **Q 4 a, P 1, P 2.**

VERONESE (Giuseppe). Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superficie di 2º grado e di altre curve e superficie [M. A. L. R., s. III, v. IX, pp. 265-343 (1880-81)].

**Q 4 a.** (*Vedi* n° 2130, 2165).

2260. **Q 4 b.**

VOLPICELLI (Paolo). Soluzione completa e generale, mediante la geometria di situazione, del problema relativo alle corse del cavallo sopra qualunque scacchiera. [A. A. L. R., t. XXV, pp. 87-160, 364-454; t. XXVI, pp. 49-187, 241-325 (1871-72, 1872-73)].

2261. **R 1 c.**

CHELINI (Domenico). Dimostrazione nuova del parallelogrammo de' moti rotatori. [N. L. A., t. IV, pp. 377-380 (1850-51)].

2262. **R 3.**

BELLAVITIS (Giusto). Sulla Statica. [M. A. L. R., s. III, v. V, pp. 29-42 (1879-80)].

**R 3 c.** (*Vedi* n° 2190).

2263. **R 4 b a.**

MORERA (Giacinto). Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. [T. A. L. R., s. III, v. VII, pp. 268-270 (1882-83)].

2264. **R 4 b a.**

VOLTERRA (Vito). Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. Nota I. [T. A. L. R., s. III, v. VIII, pp. 214-217 (1883-84)].

2265. **R 4 b a.**

VOLTERRA (Vito). Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. Nota II. [T. A. L. R., s. III, v. VIII, pp. 244-246 (1883-84)].

2266. **R 4 b a.**

PADOVA (Ernesto). Ricerche sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 269-274 (1884-85)].

2267. **R 4 b z.**

PADOVA (Ernesto). Ricerche sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 306-309 (1884-85)].

## 2268. R 4 c.

GEBBIA (Michele). Sugli sforzi interni dei sistemi articolati. [*M. A. L. R.*, s. III, v. XIII, pp. 259-273 (1881-82)].

## 2269. R 4 d.

FAVERO (Giovanni Battista). Intorno alle figure reciproche della Statica grafica. [*A. A. L. R.*, s. II, v. II, pp. 455-495 (1874-75)].

## 2270. R 4 d.

SAVIOTTI (Carlo). Sopra alcuni punti di Statica grafica. [*M. A. L. R.*, s. III, v. I, pp. 704-740 (1876-77)].

## 2271. R 4 d.

PADELLETTI (Dino). Figure alternamente reciproche ottenute mediante lo spostamento finito di un sistema rigido e diagrammi reciproci piani che se ne deducono. [*T. A. L. R.*, s. III, v. III, pp. 120-121 (1878-79)].

## 2272. R 4 d.

SAVIOTTI (Carlo). Sopra un nuovo metodo generale di composizione delle forze e sua estensione al calcolo delle travature reticolari. [*M. A. L. R.*, s. III, v. III, pp. 240-247 (1878-79)].

## 2273. R 4 d α.

FAVERO (Giovanni Battista). La determinazione grafica delle forze interne nelle travi reticolari. [*M. A. L. R.*, s. III, v. II, pp. 201-273 (1877-78)].

## 2274. R 4 d α.

SAVIOTTI (Carlo). Le travature reticolari a membri caricati. [*M. A. L. R.*, s. III, v. II, pp. 523-532 (1877-78)].

## 2275. R 4 d α.

GUIDI (Camillo). Sulla determinazione grafica delle forze interne negli archi metallici. [*M. A. L. R.*, s. III, v. IV, pp. 3-18 (1878-79)].

## 2276. R 4 d α.

GUIDI (Camillo). Sulla determinazione grafica delle forze interne nelle travi omogenee e nelle travi reticolari appoggiate agli estremi e soggette ad un sopraccarico mobile. [*M. A. L. R.*, s. III, v. V, pp. 3-28 (1879-80)].

## 2277. R 4 d α.

GEBBIA (Michele). Determinazione grafica degli sforzi interni nelle travature reticolari con aste sovrabbondanti. [*M. A. L. R.*, s. III, v. IX, pp. 467-479 (1880-81)].

## 2278. R 5 a.

FAVERO (Giovanni Battista). Intorno ad un recente studio sulla gravità. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 310-313 (1888)].

**R 5 a. (Vedi n° 2170).****2279. R 5 a α.**

KELLER (Filippo). Sull'attrazione del parallelepipedo. [*A. A. L. R.*, t. XXV, pp. 317-328 (1871-72)].

**2280. R 5 a α.**

BETTI (Enrico). Sopra la funzione potenziale di una ellissi omogenea. [*A. A. L. R.*, s. II, v. II, pp. 262-263 (1874-75)].

**2281. R 5 a α.**

BELTRAMI (Eugenio). Sull'attrazione di un anello circolare od ellittico. [*M. A. L. R.*, s. III, v. V, pp. 183-194 (1879-80)].

**2282. R 5 b.**

DINI (Ulisse). Sulla funzione potenziale dell'ellissi e dell'ellissoide. [*A. A. L. R.*, s. II, v. II, pp. 689-707 (1874-75)].

**2283. R 5 b.**

GLASER. Distribuzione di materia agente sulla superficie di un ellissoide, per ottenere nell'interno di detto solido una data azione costante in grandezza e direzione. [*T. A. L. R.*, s. III, v. VII, pp. 224-227 (1882-83)].

**2284. R 6 b.**

BETTI (Enrico). Sopra una estensione dei principi generali della dinamica. [*T. A. L. R.*, s. III, v. II, pp. 32-33 (1877-78)].

**2285. R 6 b.**

SIACCI (Francesco). Teorema fondamentale nella teoria delle equazioni canoniche del moto. [*M. A. L. R.*, s. III, v. XII, pp. 423-436 (1881-82)].

**2286. R 6 b γ.**

SIACCI (Francesco). Sopra una proposizione di J a c o b i. [*T. A. L. R.*, s. III, v. IV, pp. 236-240 (1879-80)].

**2287. R 7 a.**

CERRUTI (Valentino). Sopra una trasformazione delle equazioni del moto di un punto materiale. [*T. A. L. R.*, s. III, v. III, pp. 196-197 (1878-79)].

**2288. R 7 a.**

CESÀRO (Ernesto). Formole relative al moto d'un punto. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 18-19 (1888)].

**2289. R 7 b δ.**

AZZARELLI (Mattia). Moto dei proietti nei mezzi resistenti. [*N. L. A.*, t. XVI, pp. 1071-1091 (1862-63)].

## 2290. R 7 f.

BATTAGLINI (Giuseppe). Sul movimento per una linea di 2º ordine. [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 211-212 (1876-77)].

## 2291. R 7 f.

BATTAGLINI (Giuseppe). Sul movimento per una linea di 2º ordine. [M. A. L. R., s. III, v. I, pp. 631-638 (1876-77)].

## 2292. R 7 g.

VOLPICELLI (Paolo). Del moto rettilineo lungo un sistema di piani diversamente inclinati, e contigui. [N. L. A., t. XIII, pp. 417-431, 478-490; t. XIV, pp. 107-120 (1859-60, 1860-61)].

## 2293. R 7 g.

VOLPICELLI (Paolo). Appendice alla memoria del moto rettilineo, lungo un sistema di piani diversamente inclinati, e contigui. [N. L. A., t. XIV, pp. 181-192 (1860-61)].

## 2294. R 7 g β.

DE SAINT-ROBERT (Paul). Du mouvement d'un pendule simple suspendu dans une voiture de chemin de fer. [M. A. L. R., s. III, v. III, pp. 277-291 (1878-79)].

## 2295. R 8 a.

VOLPICELLI (Paolo). Dimostrazione di un teorema di meccanica, enunciato, e non dimostrato, da Poisson. [A. A. L. R., s. II, v. I, pp. 62-67 (1873-74)].

## 2296. R 8 a.

CERRUTI (Valentino). Intorno ai movimenti non periodici di un sistema di punti materiali. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 244-249 (1875-76)].

## 2297. R 8 a.

CERRUTI (Valentino). Intorno alle piccole oscillazioni di un corpo rigido interamente libero. [M. A. L. R., s. III, v. I, pp. 345-370 (1876-77)].

## 2298. R 8 a.

PALADINI (Bernardo). Sul movimento di rotazione che prende nel vuoto od in un fluido incomprensibile un corpo soggetto a forze di potenziale:

$$H_1 \cos^2 \theta + H_2 \cos \theta.$$

[R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1º sem., pp. 187-196 (1888)].

## 2299. R 8 a α.

CHELINI (Domenico). Nuova dimostrazione elementare delle proprietà fondamentali degli assi coniugati di rotazione e degli assi permanenti. [N. L. A., t. XXII, pp. 147-155 (1868-69)].

*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 2ª.—Stampato il 13 novembre 1895. 12

2300. R 8 a  $\alpha$ .

GEBBIA (Michele). Su due proprietà della rotazione spontanea dei corpi. [M. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 326-333 (1884-85)].

2301. R 8 c  $\alpha$ .

PADOVA (Ernesto). Proprietà del moto di un corpo di rivoluzione soggetto a forze che hanno la funzione potenziale  $H \cos^2 \omega$ . Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 135-140 (1885-86)].

2302. R 8 c  $\alpha$ .

PADOVA (Ernesto). Proprietà del moto di un corpo di rivoluzione soggetto a forze che hanno la funzione potenziale  $H \cos^3 \omega$ . Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 168-174 (1885-86)].

2303. R 8 c  $\gamma$ .

CRESCHINI (Ezio). Sul moto di una sfera che rotola su di un piano fisso. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 204-209 (1889)].

## 2304. R 8 e.

BETTI (Enrico). Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti. [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 129-130 (1876-77)].

## 2305. R 8 e.

SIACCI (Francesco). Sulle forze atte a produrre eguali spostamenti. Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 626-630 (1889)].

## 2306. R 8 e.

SIACCI (Francesco). Sulle forze atte a produrre eguali spostamenti. Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 856-860 (1889)].

2307. R 8 f  $\alpha$ .

CERRUTI (Valentino). Nuovo teorema generale di meccanica. [T. A. L. R., s. III, v. II, pp. 75-76 (1877-78)].

## 2308. R 9 b.

VOLPICELLI (Paolo). Teorici elementare dell'urto fra solidi, qualunque sia la natura e la forma dei medesimi, supposti perfettamente liberi. [N. L. A., t. I, pp. 152-169 (1847-48)].

## 2309. S 2 a.

MORERA (Giacinto). Sui moti elicoidali dei fluidi. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 611-617 (1889)].

## 2310. S 6 b.

SIACCI (Francesco). Sugli angoli di massima gittata. [R. A. L. R., s. IV, v. III, 2<sup>o</sup> sem., pp. 211-216 (1887)].

2311. **T 2 a.**

VOLPICELLI (Paolo). Sulla dottrina di Galileo, circa la resistenza relativa delle travi. [*A. A. L. R.*, t. XXIV, pp. 448-461 (1870-71)].

2312. **T 2 a.**

MENABREA (Luigi Federico). Sulla determinazione delle tensioni e delle pressioni ne' sistemi elastici. [*A. A. L. R.*, s. II, v. II, pp. 201-229 (1874-75)].

2313. **T 2 a.**

CERRUTI (Valentino). Sopra un teorema del sig. Menabrea. [*A. A. L. R.*, s. II, v. II, pp. 570-581 (1874-75)].

2314. **T 2 a.**

CERRUTI (Valentino). Sulle vibrazioni dei corpi elastici isotropi. [*M. A. L. R.*, s. III, v. VIII, pp. 361-389 (1879-80)].

2315. **T 2 a.**

CERRUTI (Valentino). Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi. [*M. A. L. R.*, s. III, v. XIII, pp. 81-123 (1881-82)].

2316. **T 2 a.**

CERRUTI (Valentino). Sulla deformazione di uno strato isotropo indefinito limitato da due piani paralleli. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. I, pp. 521-522 (1884-85)].

2317. **T 2 a.**

CERRUTI (Valentino). Sulla deformazione di un corpo elastico isotropo per alcune condizioni speciali ai limiti. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 785-792 (1888)].

2318. **T 2 a.**

CESÀRO (Ernesto). Moti rigidi e deformazioni termiche negli spazi curvi. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. IV, 2<sup>o</sup> sem., pp. 376-384 (1888)].

2319. **T 2 a.**

PADOVA (Ernesto). Sulle deformazioni infinitesime. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 176-178 (1889)].

2320. **T 2 a.**

CESÀRO (Ernesto). Sulle variazioni di volume nei corpi elastici. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. V, 2<sup>o</sup> sem., pp. 259-264 (1889)].

2321. **T 2 a  $\alpha$ .**

CERRUTI (Valentino). Sulla deformazione d'una sfera omogenea isotropa. Nota I. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 461-469 (1885-86)].

2322. **T 2 a  $\alpha$ .**

CERRUTI (Valentino). Sulla deformazione d'una sfera omogenea isotropa. Nota II. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. II, 1<sup>o</sup> sem., pp. 586-593 (1885-86)].

2323. **T 2 a α.**

CERRUTI (Valentino). Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per dati spostamenti de' punti delle due superficie limiti. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 2<sup>o</sup> sem., pp. 189-201 (1889)].

2324. **T 2 a z.**

MARCOLONGO (Roberto). Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa per speciali condizioni ai limiti. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 2<sup>o</sup> sem., pp. 349-357 (1889)].

2325. **T 2 c.**

ROITI (Antonio). La velocità teorica del suono e la velocità molecolare dei gas. [M. A. L. R., v. I, s. III, pp. 39-45 (1876-77)].

2326. **T 2 c.**

ROITI (Antonio). Sulla propagazione del suono nella odierna teoria degli aereiformi. [M. A. L. R., s. III, v. I, pp. 762-777 (1876-77)].

2327. **T 3 a, O 5 d, O 6 r β.**

MANNHEIM (A.). Mémoire d'optique géométrique contenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi, tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques. [M. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 520-546 (1884-85)].

2328. **T 3 b.**

VIOLA (Carlo). Le lamine sottili anisotrope colorate nella luce polarizzata parallela. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 1<sup>o</sup> sem., pp. 19-27 (1888)].

2329. **T 3 c.**

CESÀRO (Ernesto). Sur le pouvoir rotatoire magnétique. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 2<sup>o</sup> sem., pp. 202-208 (1889)].

2330. **T 4.**

CERRUTI (Valentino). Considerazioni sui calori specifici. [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 136-141 (1876-77)].

2331. **T 5 a, E 5.**

VOLPICELLI (Paolo). Determinazione di un integrale definito, relativo alla elettrostatica; ed applicazioni del medesimo. [N. L. A., t. XV, pp. 383-405 (1861-62)].

2332. **T 5 a, E 5.**

VOLPICELLI (Paolo). Alcune rimarchevoli formule, che si ottengono da un integrale definito, relativo alla elettrostatica. [N. L. A., t. XV, pp. 443-454 (1861-62)].

## 2333. T 5 a.

VOLPICELLI (Paolo). Rapporti fra le accumulazioni elettriche, sopra due sfere conduttrici di raggio cognito, assegnati generalmente in termini finiti. [N. L. A., t. XVI, pp. 76-83 (1862-63)].

## 2334. T 5 a.

VOLPICELLI (Paolo). Alla domanda del socio Govi sulla elettrica tensione, risposta del socio P. Volpicelli. [A. A. L. R., s. II, v. II, pp. 303-332 (1874-75)].

## 2335. T 5 a.

VOLPICELLI (Paolo). Analisi fisico-matematica degli effetti elettrostatici relativi ad un coibente armato e chiuso. [A. A. L. R., s. II, v. II, pp. 609-628 (1874-75)].

## 2336. T 5 a.

BELTRAMI (Eugenio). Sulla determinazione sperimentale della densità elettrica alla superficie dei corpi conduttori. [M. A. L. R., s. III, v. I, pp. 491-502 (1876-77)].

## 2337. T 5 a.

VOLPICELLI (Paolo). Rettificazione delle formule dalle quali viene rappresentata la teorica fisico-matematica del condensatore voltaico. [M. A. L. R., s. III, v. II, pp. 811-850 (1877-78)].

## 2338. T 5 a.

MAGGI (Gian Antonio). Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra due conduttori piani indefiniti, paralleli, assoggettati all'induzione di un punto situato nello spazio compreso fra essi. [M. A. L. R., s. III, v. VII, pp. 273-286 (1879-80)].

## 2339. T 5 a.

MAGGI (Gian Antonio). Induzione elettrica su conduttori limitati da piani indefiniti assoggettati all'azione di coibenti carichi simmetricamente intorno ad un asse. [M. A. L. R., s. III, v. IX, pp. 423-448 (1880-81)].

## 2340. T 5 a, H 11 c.

VOLTERRA (Vito). Sopra un problema di elettrostatica. [T. A. L. R., s. III, v. VIII, pp. 316-318 (1883-84)].

## 2341. T 5 a.

CESÀRO (Ernesto). Sulle formole di Maxwell. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1º sem., pp. 199-204 (1889)].

## 2342. T 5 c, Q 1.

PADOVA (Ernesto). La teoria di Maxwell negli spazi curvi. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1º sem., pp. 875-880 (1889)].

**T 6. (Vedi n° 2172).****2343. T 7 a.**

FERRARIS (Galileo). Teoremi sulla distribuzione delle correnti elettriche costanti. [M. A. L. R., s. III, v. IV, pp. 163-171 (1878-79)].

**2344. T 7 a.**

BELTRAMI (Eugenio). Sull'estensione del principio di D'Alembert all'elettrodinamica. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 852-856 (1889)].

**2345. T 7 b.**

BAZZI (Eugenio). Sul calore sviluppato da una corrente durante il periodo variabile. [M. A. L. R., s. III, v. XIII, pp. 537-554 (1881-82)].

**2346. U 2.**

DE GASPARIS (Annibale). Sul valore del parametro nelle orbite ellittiche o paraboliche. [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 165-169 (1876-77)].

**2347. U 2.**

DE GASPARIS (Annibale). Sul calcolo del parametro nelle orbite planetarie. [T. A. L. R., s. III, v. I, pp. 246-247 (1876-77)].

**2348. U 2.**

DE GASPARIS (Annibale). Sopra alcuni elementi ellittici in funzione dell'anomalia media espressa in parti del raggio. [T. A. L. R., s. III, v. III, pp. 111-112 (1878-79)].

**2349. U 2.**

DE GASPARIS (Annibale). Sul valore inverso del cubo del raggio vettore di un pianeta espresso con una serie ordinata secondo le potenze del tempo. [T. A. L. R., s. III, v. III, pp. 144-145 (1878-79)].

**2350. U 2.**

DE GASPARIS (Annibale). Sopra una equazione fra le derivate parziali delle distanze inverse di tre pianeti che scambievolmente si attraggono. [T. A. L. R., s. III, vol. V, pp. 79-80 (1880-81)].

**2351. U 2.**

DE GASPARIS (Annibale). Sopra una nuova formula pel calcolo delle orbite delle stelle doppie. [T. A. L. R., s. III, v. V, pp. 133-134 (1880-81)].

**2352. U 2.**

DE GASPARIS (Annibale). Nuove serie, per esprimere le coordinate eliocentriche in funzione dell'anomalia media. [T. A. L. R., s. III, v. VI, pag. 6; (1881-82)].

**2353. U 2.**

BETTI (Enrico). Sopra la Entropia di un sistema Newtoniano in moto stabile. Nota I. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 2<sup>o</sup> sem., pp. 113-115 (1888)].

**2354. U 2.**

BETTI (Enrico). Sopra la Entropia di un sistema Newtoniano in moto stabile.  
Nota II. [R. A. L. R., s. IV, v. IV, 2º sem., pp. 195-198 (1888)].

**2355. U 3.**

DE GASPARIS (Annibale). Sulla espressione di uno dei termini della correzione delle coordinate ellittiche nella teoria delle perturbazioni planetarie. [T. A. L. R., s. III, v. III, pp. 92-93 (1878-79)].

**2356. U 3.**

DE GASPARIS (Annibale). Sulla variazione delle eccentricità nelle orbite planetarie. [T. A. L. R., s. III, v. IV, pp. 50-51 (1879-80)].

**2357. U 3.**

DE GASPARIS (Annibale). Sulla variazione dell'area descritta dalla luna intorno alla terra, prodotta dall'azione solare. [T. A. L. R., s. III, v. IV, pp. 116-117 (1879-80)].

**2358. U 3.**

DE GASPARIS (Annibale). Verificazione ed uso di una nuova formola pel calcolo delle perturbazioni planetarie. [T. A. L. R., s. III, v. IV, 246-248 (1879-80)].

**2359. U 3.**

DE GASPARIS (Annibale). Sulle correzioni alle coordinate ellittiche, nel calcolo delle correzioni planetarie. [T. A. L. R., s. III, v. V, pp. 310-312 (1880-81)].

**2360. U 6.**

BETTI (Enrico). Sopra il moto di un ellissoide fluido eterogeneo. [T. A. L. R., s. III, v. V, pp. 201-202 (1880-81)].

**V 3 b. (Vedi n° 2361).**

**2361. V 3 c., V 3 b.**

VINCENT (H) et MARTIN (H). Passage du traité « De la musique » d'Aristide Quintilien relatif au nombre nuptial de Platon, traduit et annoté par M. H. Vincent e M. H. Martin; suivi de deux notes de M. H. Martin, l'une sur l'époque d'Aristide Quintilien et sur celle de l'astronome Claude Ptolémée; l'autre sur la chronologie de la vie et des œuvres de Ptolémée. [N. L. A., t. XVIII, pp. 365-376 (1864-65)].

**V 3 d. (Vedi n° 2368).**

**2362. V 4.**

SÉDILLOT (L. Am.). Sur l'origine de nos Chiffres. (Lettre de M. Sédillot à M. le Prince B. Boncompagni). [N. L. A., t. XVIII, pp. 316-322 (1864-65)].

## 2363. V 4 c.

MARRE (Aristide). Le *Talkhs D'Ibn Al-bannā*, traduit pour la première fois (d'après un Ms. inédit de la Bibliothèque Bodléienne coté « Marsh 378 » n° CCXVII du Catalogue d'Uri). [N. L. A., t. XVII, pp. 289-319 (1863-64)].

## 2364. V 4 c.

MARRE (Aristide). Biographie d'Ibn Al-bannā, mathématicien du XIII<sup>e</sup> siècle, extraite du *Tekmilet Ed-Bibadj d'Ahmed Baba*, traduite et annotée. [N. L. A., t. XIX, pp. 1-10 (1865-66)].

## 2365. V 4 c.

BONCOMPAGNI (Baldassare). Introduction au Calcul Gōbari et Hawāī — Traité d'arithmétique traduit de l'arabe par François Woepke, et précédé d'une notice de M. Aristide Marre sur un manuscrit possédé par M. Chasles, membre de l'Institut Impérial de France (Académie des Sciences), et contenant le texte arabe de ce traité. (Avertissement de B. Boncompagni). [N. L. A., t. XIX pp. 360-361 (1865-66)].

## 2366. V 4 c.

MARRE (Aristide). Sur un manuscrit arabe possédé par M. Chasles et contenant plusieurs traités d'Astronomie et un traité d'arithmétique. [N. L. A., t. XIX, pp. 362-364 (1865-66)].

## 2367. V 4 c.

Introduction au Calcul Gōbari et Hawāī. [N. L. A., t. XIX, pp. 365-383 (1865-66)].

## V 4 c. (Vedi n° 2373).

## 2368. V 5 a, V 3 d.

MARTIN (Th. Henri). Sur l'âge du traité *De Republica* de Cicéron et sur l'époque de Théodore Méliténio. Passages de lettres adressées à B. Boncompagni, suivis d'une addition à sa note sur l'époque d'Aristide Quintilien et d'un article sur Aristide Quintilien tiré des *Vite de' Matematici* de Bernardino Baldi. [N. L. A., t. XIX, pp. 87-100 (1865-66)].

## 2369. V 5 a.

MARTIN (Th. Henri). Note sur un article inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* et relatif à la publication intitulée: Passage du traité « De la musique » d'Aristide Quintilien. [N. L. A., t. XIX, pp. 267-268 (1865-66)].

## 2370. V 5 b.

BONCOMPAGNI (Baldassare). Delle versioni fatte da Platone Tiburtino traduttore del secolo duodecimo. [N. L. A., t. IV, pp. 247-286 (1850-51)].

## 2371. V 5 b.

BONCOMPAGNI (Baldassare). Della vita e delle opere di Gherardo Cre-

mone se, traduttore del secolo duodecimo, e di Gherardo da Sabbionetta, astronomo del secolo decimoterzo. [N. L. A., t. IV, pp. 387-493 (1850-51)].

**2372. V 5 b.**

BONCOMPAGNI (Baldassare). Della vita e delle opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo. [N. L. A., t. V, pp. 5-91, 208-246 (1851-52)].

**2373. V 5 b, V 4 c.**

WOEPCKE (F.). Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par M. le prince Balthasar Boncompagni, et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des arabes. [N. L. A., t. X, pp. 236-248; t. XII, pp. 230-275, 399-438; t. XIV, pp. 211-227, 241-269, 301-324, 343-359 (1856-57; 1858-59; 1860-61)].

**2374. V 5 b.**

BONCOMPAGNI (Baldassare). Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478. [N. L. A., t. XVI, pp. 1-64, 101-228, 301-364, 389-452, 503-630, 683-842, 909-1044 (1862-63)].

**2375. V 5 b.**

NARDUCCI (Enrico). Intorno ad un manoscritto della Biblioteca Alessandrina contenente gli apici di Boezio, senz'abaco e con valore di posizione. [M. A. L. R., s. III, v. I, pp. 503-509 (1876-77)].

**2376. V 5 d.**

NARDUCCI (Enrico). Trattatello sulle divisioni, secondo il sistema dell'abbaco, scritto in Italia innanzi al secolo XII. [R. A. L. R., s. IV, v. I, pp. 563-566 (1884-85)].

**2377. V 7.**

GOVI (Gilberto). Galileo e i matematici del Collegio Romano nel 1611. [A. A. L. R., s. II, v. II, pp. 230-240 (1874-75)].

**2378. V 7.**

GOVI (Gilberto). Dei metodi proposti nel 1639 da B. Cavalieri per ottenere direttamente il logaritmo della somma o della differenza di due numeri dei quali sono dati i logaritmi e per risolvere mediante le funzioni circolari le equazioni di 2º grado. [M. A. L. R., s. II, v. III, pp. 173-178 (1875-76)].

**2379. V 8, Q 1.**

BELTRAMI (Eugenio). Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski. [R. A. L. R., s. IV, v. V, 1º sem., pp. 441-448 (1889)].  
*Rend. Circ. Matem.*, t. IX, parte 2ª.—Stampato il 14 novembre 1895. 13

2380. **V 9.**

**CREMONA** (Luigi). Commemorazione di Domenico Chelini. [*T. A. L. R.*, s. III, v. III, pp. 54-59 (1878-79)].

2381. **V 9.**

**SELLA** (Quintino). Commemorazione del socio Gaspare Mainardi. [*T. A. L. R.*, s. III, v. III, pp. 126-128 (1878-79)].

2382. **V 9.**

**SELLA** (Quintino). Commemorazione del socio Paolo Volpicelli. [*T. A. L. R.*, s. III, v. III, pp. 160-168 (1878-79)].

2383. **V 9.**

**SELLA** (Quintino). Cenno necrologico di Giusto Bellavitis. [*T. A. L. R.*, s. III, v. V, pp. 15-19 (1880-81)].

2384. **V 9.**

**SIACCI** (Francesco). Paolo Ballada di St. Robert. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 243-247 (1889)].

2385. **V 9.**

**BRIOSCHI** (Francesco). Notizie sulla vita e sulle opere di Giorgio Enrico Halphen. [*R. A. L. R.*, s. IV, v. V, 1<sup>o</sup> sem., pp. 815-823 (1889)].

---

---

**Tomo IX (1895).—Parte II<sup>a</sup>: BIBLIOTECA MATEMATICA.**

## INDICE

## **PUBBLICAZIONI NON-PERIODICHE**

PERVENUTE IN DONO AL CIRCOLO.

## **REPERTORIO BIBLIOGRAFICO**

DELLE SCIENZE MATEMATICHE IN ITALIA

<b>R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti</b> (1840-1889). [Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.—Memorie del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti]. N° 1492-1641.	9-23
<b>Errata-Corrigere</b> . . . . .	23
<b>Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche</b> (1868-1887), pubblicato da B. Boncompagni. N° 1642-1913	24-51
<b>Nota del prof. Gino Loria</b> . . . . .	51
<b>R. Accademia dei Lincei</b> (1847-1889). [Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei.—Atti della Reale Accademia dei Lincei.—Atti della Reale Accademia dei Lincei: Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.—Atti della Reale Accademia dei Lincei: Transunti.—Atti della Reale Accademia dei Lincei: Rendiconti]. N° 1914-2385	52-98

*Fine della Parte 2<sup>a</sup> del Tomo IX (1895).*

---

*Tipografia Matematica*  
28, via Ruggiero Settimo, Palermo.

---

# RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO

## INDICE GENERALE

delle Memorie e Comunicazioni contenute nella Parte Prima dei tomii I-IX (\*).

---

### Alagna, R. (Palermo).

- 7 e.** Condizioni perchè una forma dell'ottavo ordine abbia 4 punti doppi . . . . . **IV**, 25  
**7 e.** Intorno ad alcuni casi di multiplicità delle radici dell'equazione d'ottavo ordine. **IV**, 287-  
**7 f.** Condizioni perchè due forme biquadratiche siano in involuzione . . . . . **V**, 301-  
**7 e.** Le relazioni fra gl'invarianti d'una forma qualunque d'ottavo ordine . . . . . **VI**, 77

### Albeggiani, M. L. (Palermo).

- 8 c.** Sopra le parentesi di Poisson . . . . . **I**, 6-7, 9-11, 12-13,  
**4 e.** Sopra un teorema di Hermite . . . . . **I**, 59  
**8 c.** Generalizzazione di due teoremi riguardanti le parentesi d'ordine  $n$  . . . . . **I**, 314-  
**4 a.** Intorno ad alcune formole nella teorica delle funzioni ellittiche. . . . . **I**, 350-  
**5 l.** Linee geodetiche tracciate sopra talune superficie. . . . . **III**, 80-  
**9.** Rivista bibliografica su di uno scritto del signor Clasen . . . . . **III**, 274-  
**12 b a.** Osservazioni sulla Nota del prof. F. Caldarella: « Sistema di circoli tangenti  
a tre cerchi dati, in coordinate trilineari » . . . . . **IV**, 50

### Amioi, N. (Montecassino).

- 7 a, 17 b.** Risoluzione della congruenza  $x^m \equiv b \pmod{2^n}$  . . . . . **VIII**, 187-  
-

### Asoione, E. (Caserta).

- 17 a.** Su di un teorema di geometria proiettiva. Osservazioni . . . . . **IX**, 2  
**17 a.** Errata corrigé alle Osservazioni: « Su di un teorema, etc. » . . . . . **IX**, 2

### Beltrami, E. (Roma).

- 2 a, T 6.** Note fisico-matematiche. (Lettera al prof. Ernesto Cesàro). . . . . **III**, 67.

---

(\*) La notazione che precede il titolo di ciascun lavoro si riferisce alla classificazione adottata dal Congresso di Parigi (16-19 luglio 18) a *« Répertoire bibliographique des sciences mathématiques »* (Cfr. l'opuscolo: *Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, Paris-Villars et fils, 1893). — Il presente lavoro di spoglio è stato fatto per cura del segretario del COMITATO ITALIANO PER IL REPERTORIO BIBLIOGRAFICO DELLE SCIENZE MATEMATICHE, prof. F. Gerbaldi, dell'Università di Palermo.

<b>R 5 a.</b>	Sulla funzione potenziale della circonferenza . . . . .	III,
<b>T 3 b.</b>	Sulla teoria generale delle onde piane . . . . .	V,
<b>V 9.</b>	Enrico Betti. . . . .	VI,

**Bertini, E. (Pisa).**

<b>M' 1 f.</b>	Sulle curve fondamentali dei sistemi lineari di curve piane algebriche . . . . .	III,
<b>G 1 c.</b>	Osservazioni sulle « Vorlesungen ueber Riemann's Theorie der Abel'schen Integralen » von Dr. C. Neumann (zweite Auflage). (Lettera al prof. A. Capelli) . . . . .	VI,

**Berzolari, L. (Torino).**

<b>P 4 f.</b>	Un nuovo teorema sulle involuzioni piane . . . . .	III,
<b>B 7 a, B 7 b, M' 5.</b>	Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba (due Note) . . . . .	V, 91
<b>B 7 f.</b>	Sui combinanti dei sistemi lineari di quintiche binarie . . . . .	VII
<b>M' 1 b, Q 2.</b>	Sulle secanti multiple di una curva algebrica dello spazio a tre od a quattro dimensioni. (Estratto di Lettera diretta al prof. C. F. Geiser) . . . . .	IX

**Bettazzi, R. (Torino).**

<b>D 1 a, J 5.</b>	Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale. . . . .	VII
--------------------	---	-----

**Betti, E. +**

<b>R 7 b a, R 8 e.</b>	Sopra una estensione della terza legge di Keplero . . . . .	II
------------------------	---	----

**Bianchi, L. (Pisa).**

<b>O 6 p.</b>	Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten . . . . .	VII
---------------	---	-----

**Bortolotti, Sig.<sup>na</sup> Emma (Bologna).**

<b>D 2 d a.</b>	Sulle frazioni continue algebriche periodiche. . . . .	XI
-----------------	--	----

**Bortolotti, Ettore (Roma).**

<b>D 2 f.</b>	Sui sistemi ricorrenti del 3° ordine ed in particolare sui sistemi periodici. . . . .	I
<b>D 2 f.</b>	Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche periodiche . . . . .	V

**Brambilla, A. (Napoli).**

<b>M' 8 b.</b>	Di una certa superficie algebrica razionale . . . . .	I
----------------	---	---

**Burali-Forti, C. (Torino).**

<b>O 4 e, O 5 n.</b>	Le linee isofote delle rigate algebriche. . . . .	I
----------------------	---	---

<b>P 6 f.</b>	Sopra il sistema di quattro equazioni lineari . . . . .
<b>J 5.</b>	Sulle trasformazioni (2,2) che si possono ottenere mediante due trasformazioni doppie . . . . .
	Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti . . . . .

Burgatti, P. (Roma).

<b>R 6 b.</b>	Un teorema di Meccanica . . . . .
---------------	-----------------------------------

Caldarera, F. (Palermo).

<b>M<sup>1</sup> 2 a β.</b>	Sulla teoria dei centri armonici . . . . .
<b>K 12 b α.</b>	Sistema di circoli tangentati a tre cerchi dati, in coordinate trilineari . . . . .

Cantone, A. †

<b>M<sup>1</sup> 5.</b>	Teoremi sulla cubica gobba . . . . .
-------------------------	--------------------------------------

Capelli, A. (Napoli).

<b>H 10 d.</b>	Sopra il teorema di Green . . . . .
<b>P 4 a.</b>	Soluzione di un quesito proposto dal prof. P. H. Schoute . . . . .
<b>B 4 h.</b>	Sulle operazioni invariantive delle funzioni di $n$ serie di variabili $n$ arie . . . . .
<b>L<sup>1</sup> 16 a.</b>	Sopra un manoscritto del defunto prof. Gaetano Batà . . . . .
<b>B 4 h.</b>	Sopra un teorema che si collega strettamente colla formola che serve ad esprimere le forme algebriche di $n$ serie di variabili $n$ arie per mezzo di potenze del determinante delle variabili e di forme che dipendono da sole $n-1$ serie di variabili.

Casorati, F. †

<b>M<sup>1</sup> 3 h.</b>	Su gli asintoti delle linee piane algebriche. (Da una lettera a G. B. Guccia).
---------------------------	--

Castelnuovo, G. (Roma).

<b>Q 2.</b>	Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche . . . . .
<b>Q 2.</b>	Su certi gruppi associati di punti . . . . .
<b>M<sup>1</sup> 8 d.</b>	Su una Comunicazione del sig. Humbert. . . . .
<b>M<sup>1</sup> 1 d α.</b>	Sullo stesso argomento. . . . .
<b>M<sup>1</sup> 8 c.</b>	Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche . . . . .
<b>M<sup>1</sup> 1 d z.</b>	Sopra un teorema del sig. Humbert . . . . .
<b>Q 2, M<sup>1</sup> 2 g, M<sup>1</sup> 1 d.</b>	Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica. . . . .

Catalan, E. †

<b>D 6 c ε.</b>	Sur les nombres de Segner . . . . .
-----------------	-------------------------------------

**Cerruti, V. (Roma).**

<b>R 7 a.</b>	Proposta di quesito . . . . .	<b>III,</b>
<b>V 9.</b>	Elenco dei lavori scientifici di Enrico Betti . . . . .	<b>VIII, 161.</b>

**Certo, L. (Palermo).**

<b>K 9 a.</b>	Teorema sugli angoli di un poligono convesso. . . . .	<b>IV, 285.</b>
<b>K 14 a.</b>	Intorno ad una dimostrazione di un teorema sugli angoloidi . . . . .	<b>IV,</b>

**Cesàro, E. (Napoli).**

<b>D 1 a.</b>	Intorno ad una ricerca di limiti . . . . .	<b>II, 224-</b>
<b>I 11.</b>	Sull'uso dell'integrazione in alcune questioni d'aritmetica . . . . .	<b>II, 293-</b>
<b>J 2 f.</b>	Intorno ad una questione di probabilità . . . . .	<b>II, 299-</b>
<b>R 7.</b>	Sul moto d'un punto sollecitato verso una retta . . . . .	<b>II, 304-</b>

**Conti, I. (Palermo).**

<b>N<sup>o</sup> 1 g a.</b>	Sulle congruenze generate da una coppia di piani in corrispondenza doppia (due Note) . . . . .	<b>I, 230-240; III, 97-</b>
-----------------------------	--	-----------------------------

**Cordone G. (Genova).**

<b>I 3 c.</b>	Sulla congruenza generale di 4° grado secondo un modulo primo . . . . .	<b>IX, 209-</b>
---------------	---	-----------------

**Cremona, L. (Roma).**

<b>V 9.</b>	Parole pronunziate nell'adunanza dell'Accademia dei Lincei, del dì 4 dicembre 1892, nel presentare l'opuscolo: « Riccardo De Paolis; Cenni biografici di C. Segre ». . . . .	<b>VII, 247-</b>
-------------	--	------------------

**Del Pezzo, P. (Napoli).**

<b>N<sup>o</sup> 1 b.</b>	Intorno alla rappresentazione del complesso lineare di rette sullo spazio di punti a tre dimensioni . . . . .	<b>II, 157-1</b>
<b>Q 2.</b>	Sulle superficie dell' $n$ mo ordine immerse nello spazio di $n$ dimensioni . . . .	<b>II, 241-2</b>
<b>M<sup>2</sup> 8 c.</b>	Un teorema sulle superficie razionali dello spazio a 3 dimensioni . . . .	<b>II,</b>
<b>P 4 h.</b>	Estensione di un teorema di Noether . . . . .	<b>II, 139-1</b>
<b>M<sup>1</sup> 1 f., M<sup>2</sup> 1 f.</b>	Sui sistemi di curve e di superficie . . . . .	<b>III, 236-2</b>
<b>D 5 b, Q 2.</b>	Sulle superficie di Riemann relative alle curve algebriche . . . . .	<b>VII, 115-1</b>
<b>D 4 f. M<sup>2</sup> 8 f., P 4 g.</b>	Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche . . . . .	<b>VII, 139-1</b>

**Del Re, A. (Modena).**

- P 1, P 2.** Su certi luoghi che s'incontrano nello studio di tre forme geometriche fondamentali di 2<sup>a</sup> specie, proiettivamente riferite due a due . . . . . **II, 272**
- O 7 b.** Alcune proprietà geometriche che potrebbero essere utili nella teorica dei sistemi di raggi luminosi . . . . . **II, 284**
- N<sup>o</sup> 1 f.** Sulla congruenza (6,2) delle rette che uniscono le coppie di punti omologhi di due quadriche che si corrispondono in una determinata omografia non assiale né omologica dello spazio . . . . . **II, 290-**
- P 1, P 2.** Sur une question élémentaire de géométrie . . . . . **II, 3**
- Q 2.** Sui sistemi lineari  $n$ -pli di sfere di un  $n$ -spazio. . . . . **II, 124**
- P 1 b.** Un teorema di geometria proiettiva sintetica ed alcuni suoi corollari . . . . . **II, 128**

**Diokson, L. E. (Chicago).**

- P 4 b.** A Quadratic Cremona Transformation Defined by a Conic . . . . . **IX, 256**

**Di Pirro, G. (Roma).**

- H 3 b, R 6 b.** Sulle trasformazioni delle equazioni della Dinamica . . . . . **IX, 169**

**D'Ovidio, E. (Torino).**

- B 4 c.** Teorema sulle forme algebriche, con applicazione alle binarie di sesto ordine . . . . . **VII, 225**
- B 4 c, B 7 c.** Applicazione di un teorema sulle forme algebriche alle binarie di quinto ordine . . . . . **VII,**

**Enriques, F. (Bologna).**

- V 1.** Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva. (Lettera al Dr. G. Fano). **IX, 8**

**Fano, G. (Roma).**

- V 1.** Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva. (Lettere al Dr. F. Enriques) . . . . . **IX, 79-82, 8**

**Fouret, G. (Paris).**

- M<sup>o</sup> 1 a.** Sur quelques propriétés involutives des courbes algébriques . . . . . **III, 4**
- M<sup>o</sup> 3 e.** Sur quelques propriétés relatives aux points d'incidence des droites issues d'un même point et rencontrant une courbe plane algébrique sous un même ang'e . . . . . **V, 7**
- N<sup>o</sup> 1 g.** Sur la génération des congruences de droites du premier ordre et de classe quelconque . . . . . **VII, 6**
- M<sup>o</sup> 1 b.** Sur le nombre des plans tangents que l'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface . . . . . **V**

**Garibaldi, C. (Genova).**

<b>J 5.</b>	Sull'estensione degli aggregati numerabili . . . . .	<b>VIII,</b>
<b>J 5.</b>	Un piccolo contributo alla teoria degli aggregati . . . . .	<b>IX,</b>

**Gebbia, M. (Palermo).**

<b>R 8 b.</b>	Due teoremi di Meccanica . . . . .	<b>I,</b>
<b>O 51 a.</b>	Sopra una questione posta e risolta analiticamente dal signor J. N. Hazzidakis.	<b>I,</b>
<b>O 8 c.</b>	Sopra un metodo per formare le equazioni a derivate parziali, delle superficie che ammettono una generatrice di forma costante. . . . .	<b>I,</b>
<b>R 7 a.</b>	Intorno a una Nota di Valentino Cerruti. . . . .	<b>I,</b>
<b>R 5 a.</b>	Su certe funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio infinito. (Con tavola).	<b>IV,</b>
<b>T 2 a.</b>	Proposizioni fondamentali della Statica dei corpi elastici. . . . .	<b>V,</b>
<b>R 5 a.</b>	Su certe funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio infinito. (Appendice alla Memoria pubblicata nel t. IV, pp. 217-252). . . . .	<b>VI,</b>
<b>V 9.</b>	« Giuseppe Albegiani ». . . . .	<b>VII,</b>
<b>T 2 a.</b>	Sugli enunciati della Nota: « Proposizioni fondamentali della Statica dei corpi elastici » (t. V, pp. 320-323) . . . . .	<b>VII,</b>

**Gerbaldi, F. (Palermo).**

<b>L' 17 a.</b>	Sulla realtà dei punti e delle tangenti comuni a due coniche. . . . .	<b>I,</b>
<b>B 4 f.</b>	Un teorema sull'Hessiana d'una forma binaria . . . . .	<b>III,</b>
<b>B 8 d.</b>	Sull'Hessiana del prodotto di due forme ternarie . . . . .	<b>III,</b>
<b>B 12 a.</b>	Sulla forma binaria cubica. . . . .	<b>III,</b>
<b>O 2 j a.</b>	Sui punti sestatici delle curve algebriche piane. . . . .	<b>IV,</b>
<b>B 8 a.</b>	Sulle curve piane del terz'ordine . . . . .	<b>VII,</b>
<b>M' 6 l.</b>	L'equazione di 24° grado da cui dipende la ricerca dei flessi nella curva generale di 4° ordine . . . . .	<b>VII,</b>
<b>M' 1 e.</b>	Sulle singolarità della Jacobiana di tre curve piane . . . . .	<b>VIII,</b>
<b>M' 2 a a.</b>	Sulle involuzioni di specie qualunque . . . . .	<b>IX,</b>

**Giudice, F. (Genova).**

<b>A 3 d.</b>	Sulla determinazione delle radici reali delle equazioni a coefficienti numerici reali.	<b>I,</b>
<b>J 4 a.</b>	Un teorema sulle sostituzioni . . . . .	<b>I,</b>
<b>A 4 e.</b>	Sulle equazioni irriducibili di grado primo risolubili per radicali . . . . .	<b>I,</b>
<b>H 11 c.</b>	Sopra la determinazione di funzioni d'una variabile definite per mezzo d'un'equazione con due variabili. Un'osservazione relativa alla costante che compare negli sviluppi in serie delle funzioni circolari . . . . .	<b>II,</b>

<b>H 11 c.</b>	Risposta a due osservazioni del prof. G. Peano sulla Nota precedente . . .	<b>III,</b> 9
<b>B 1 c.</b>	Formole sui determinanti . . . . .	<b>II,</b>
<b>D 1 a.</b>	Per una Comunicazione che mi riguarda. . . . .	<b>II,</b>
<b>D 6 c e, K 14 b.</b>	Sui numeri poliedrici. . . . .	<b>III,</b>
<b>D 1 a.</b>	Sulla possibilità di funzioni di stesso valore, equivalenti, non identiche . . .	<b>III,</b> 273
<b>D 2 a α.</b>	Due teoremi sulle serie a termini positivi . . . . .	<b>IV,</b> 6
<b>D 1 a.</b>	Risposta al prof. Vivanti. . . . .	<b>IV,</b> 6
<b>D 2 a.</b>	Osservazioni sulle serie . . . . .	<b>IV,</b> 275-276, 276
<b>D 2 a α.</b>	Un nuovo criterio di convergenza per le serie a termini positivi. <b>IV,</b> 278-279, 279-280, 28c 281-282,	
<b>D 2 a α.</b>	Per un recente articolo del sig. Fouret . . . . .	<b>IV,</b> 284
<b>D 1 a.</b>	Sulle successioni . . . . .	<b>V,</b> 28c
<b>D 2 c.</b>	Sui prodotti infiniti a fattore generale sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze di $\frac{1}{n}$ . . . . .	<b>V,</b> 28f
<b>A 3 g.</b>	Sopra un criterio del sig. Petersen per calcolare un limite superiore alle radici d'un'equazione numerica . . . . .	<b>VII,</b> 157
<b>V 1.</b>	Subsinti e transsinti dal punto di vista di Cantor. . . . .	<b>VII,</b> 161

**Giuliani, G. (Pisa).**

<b>I 11.</b>	Sulla funzione $E(x)$ . . . . .	<b>V,</b> 28f
--------------	---------------------------------	---------------

**Guccia, G. B. (Palermo).**

<b>P 4 c.</b>	Formole analitiche di trasformazioni Cremoniane . . . . .	<b>I,</b> 17-19, 20-23, 24-25,
<b>O 2 i.</b>	Estensione di un teorema sul tactinvariante di due curve algebriche . . . . .	<b>I,</b> 2
<b>N<sup>o</sup> 2 g.</b>	Sopra alcune formole del signor Picquet. . . . .	<b>I,</b> 2
<b>P 4 c.</b>	Teoremi sulle trasformazioni Cremoniane nel piano. Estensione di alcuni teoremi di Hirst sulle trasformazioni quadratiche . . . . .	<b>I,</b> 56-57, 11f
↳ <b>P 4 c.</b>	Restituzione di priorità . . . . .	<b>I,</b>
↳ <b>M<sup>o</sup> 1 f.</b>	Generalizzazione di un teorema di Nöther . . . . .	<b>I,</b> 13
<b>M<sup>o</sup> 8 c α.</b>	Sul'e superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali . . . . .	<b>I,</b> 16
<b>M<sup>o</sup> 1 f, M<sup>o</sup> 2 d.</b>	Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche e sopra un teorema	

<b>M' 1 f.</b>	Sopra un recente lavoro concernente la riduzione dei sistemi lineari di curve algebriche piane . . . . .	<b>III,</b> 2
<b>G 1 d γ.</b>	Sulle singolarità composte delle curve algebriche piane . . . . .	<b>III,</b> 1
<b>M' 1 d z.</b>	Su un esempio addotto dal sig. Castelnuovo. . . . .	<b>IV,</b>
<b>M' 2 a x.</b>	Due proposizioni relative alle involuzioni di specie qualunque, dotate di singolarità ordinarie . . . . .	<b>VII,</b>
<b>M' 1 d, M' 1 e, M' 1 f.</b>	Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie (Memoria I <sup>a</sup> ). . . . .	<b>VII,</b> :
<b>M' 1 c.</b>	Una definizione sintetica delle curve polari . . . . .	<b>VII,</b> :
<b>M' 2 a x.</b>	Sulle involuzioni di specie qualunque dotate di singolarità ordinarie. . . . .	<b>VIII,</b> :
<b>M' 1 d, M' 1 e, M' 1 f.</b>	Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie (Memoria II <sup>a</sup> ) . . . . .	<b>IX,</b>
<b>M' 1 f.</b>	Sui vincoli esistenti fra i punti di contatto delle tangenti condotte da un punto a $k$ curve algebriche piane . . . . .	<b>IX,</b> :

**Halphen, G. H. +**

- H 2 c.** Sur l'équation d'Euler. (Extrait d'une Lettre adressée à M. G.-B. Guccia). **II,**

**Hermite, Ch. (Paris).**

- H 5 g x.** Sur les polinômes de Legendre. . . . .
- F 5 a β.** Sur la transformation des fonctions elliptiques. (Extrait d'une Lettre adressée à Mr. S. Pincherle). . . . .

**Hirst, T. A. +**

- N<sup>o</sup> 1 g α.** Sur la congruence Roccella, du troisième ordre et de la troisième classe . **I,**

**Humbert, G. (Paris).**

- M<sup>o</sup> 8 d.** Théorèmes concernant une classe de surfaces algébriques . . . . .
- M<sup>o</sup> 8 d.** Sur une classe de surfaces algébriques. . . . .
- M<sup>o</sup> 8 d.** Réponse aux observations de M. Castelnuovo. . . . .
- M' 1 d z.** Sur le même argument . . . . .
- N<sup>o</sup> 2 k.** Sur un problème de contact de M. de Jonquieres . . . . .

**Jonquieres, E. de (Paris).**

- M' 1 d x, M' 7 a.** Construction géométrique de courbes unicursales, notamment de celle du 5<sup>ème</sup> ordre douée de six points doubles . . . . .

<b>Jordan, C. (Paris).</b>	
<b>Q 4 b.</b> Sur la marche du cavalier. . . . .	<b>III,</b> 5
<b>V 9.</b> Adressa présentée, au nom du Cercle Mathématique de Palerme, à l'occasion du 70 <sup>e</sup> anniversaire de M. Ch. Hermite . . . . .	<b>VI, 252</b>
<b>Jung, G. (Milano).</b>	
<b>M<sup>r</sup> 1 f, M<sup>r</sup> 8 a.</b> Delle famiglie associate di sistemi lineari e delle superficie univoca- mente rappresentabili sul piano . . . . .	<b>IV, 253</b>
<b>Kantor, S.</b>	
<b>M<sup>r</sup> 4 d, P 4.</b> Sur les courbes hyperelliptiques portant des correspondances univoques . .	<b>IX, 6</b>
<b>Kerbedz, Mme E. de (St.-Pétersbourg).</b>	
<b>V 9.</b> Sophie de Kowalevski. . . . .	<b>V, 121</b>
<b>Kohn, G. (Wien).</b>	
<b>M<sup>r</sup> 1 c.</b> Eine Definition der Polaren. (Auszug aus einem Schreiben an Herrn G. B. Guccia). <b>VII, 307</b>	
<b>V 9.</b> Emilio Weyr. Necrologia. (Traduzione di F. Gerbaldi) . . . . .	<b>IX, 260</b>
<b>Laisant, C. A. (Paris).</b>	
<b>B 4 g, B 1 c.</b> Note sur les invariants des polynômes entiers . . . . .	<b>VIII, 249</b>
<b>Lauricella, G. (Pisa).</b>	
<b>H 5 f<sup>a</sup>.</b> Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili . . . . .	<b>VII, 111-</b>
<b>Lazzeri, G. (Livorno).</b>	
<b>M<sup>r</sup> 1 a, M<sup>r</sup> 1 a.</b> Sopra certi sistemi di linee e di superficie . . . . .	<b>III, 110-</b>
<b>Lebon, E. (Paris).</b>	
<b>K 12 b<sup>b</sup>.</b> Solution du problème de Malfatti (con tavola) . . . . .	<b>III, 120</b>
<b>O 5 h.</b> Sulla determinazione degli ombelichi delle superficie tetraedriche. . . . .	<b>IV, 115</b>
<b>Loria, G. (Genova).</b>	
<b>Q 2.</b> Intorno alle curve razionali d'ordine $n$ dello spazio a $n-1$ dimensioni . . . . .	<b>III, 201</b>
<b>V 9.</b> Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati. (Dalla <i>Bibliotheca Mathematica</i> di G. Eneström, nuova serie, t. V, 1891, p. 1-12. Con aggiunte dell'Autore) . . . . .	-

**Maccoferri, E. (Bologna).**

- L' 17 a.** Su di un teorema fondamentale relativo agli elementi comuni di due coniche in  
un piano . . . . . IX,

**Maisano, G. (Messina).**

- |                              |  |   |
|------------------------------|--|---|
| <b>B</b> 7 d.                | Sulla sestica binaria . . . . .  | <b>II</b> , 2, 4, 6,                            |
| <b>M'</b> 2 a $\alpha$ .     | Sopra una particolare involuzione del 4 <sup>o</sup> ordine . . . . .  | <b>II</b> ,                                     |
| <b>L'</b> 1 f.               | Interpretazione, sulla conica, della sestica binaria, di cui si annulla il cataletti-<br>cante, e dei suoi principali invarianti . . . . .             | <b>II</b> ,                                     |
| <b>M'</b> 1 c.               | Ricerche sul gruppo di punti situati sull'Hessiana di una curva d'ordine $n$ , le<br>cui tangentie toccano la Cayleyana . . . . .                      | <b>II</b> ,                                     |
| <b>B</b> 8 b.                | Sui covarianti indipendenti di 6 <sup>o</sup> grado nei coefficienti della forma biquadratica ter-<br>naria . . . . .                                  | <b>II</b> ,                                     |
| <b>M'</b> 1 g.               | Ricerche intorno a certe curve covarianti analoghe [alle curve Hessiana,<br>Steineriana e Cayleyana di una curva fondamentale d'ordine $n$ ] . . . . . | <b>II</b> ,                                     |
| <b>M'</b> 7 a.               | Sulle tangentie doppie e d'inflessione della curva generale del 5 <sup>o</sup> ordine . . . .  | <b>II</b> ,                                     |
| <b>B</b> 7 d., <b>B</b> 7 e. | L'Hessiano della sestica binaria e il discriminante della forma dell'ottavo<br>ordine (tre Note) . . . . .   | <b>III</b> , 53-59; <b>IV</b> , 1-8; <b>V</b> , |
| <b>B</b> 8 a.                | Il combinante $N$ della forma ternaria cubica. . . . .   | <b>IV</b> ,                                     |

**Mannheim, A. (Paris).**

- O 8 c.** Étude d'un déplacement particulier d'une figure de forme invariable par des procédés élémentaires et purement géométriques. (Con due tavole intercalate nel testo). **III.**

**Marcolongo, R. (Messina).**

- R 6.** Teorema di meccanica . . . . . **II.**  
**R 8 a α.** Intorno ad un punto della teoria della rotazione di un corpo . . . . . **VIII.**  
**R 1 b.** Sulla ricerca dei centri di curvatura delle traiettorie dei punti di una figura mobile. **VIII.**

**Martinetti, V. (Messina).**

- |                |  |            |
|----------------|--|------------|
| <b>M' 1 f.</b> | Sopra una classe di sistemi lineari di curve piane algebriche . . . . .                                    | <b>8,</b>  |
| <b>M' 1 f.</b> | Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere due. . . . .                              | <b>11,</b> |
| <b>P 6 c.</b>  | Sul genere delle curve $\Omega$ nelle involuzioni piane di classe qualunque (due Note). <b>IV</b> , 30-42, |            |
| <b>5 a.</b>    | Teoremi sui poligoni di Steiner inscritti in una curva di terzo ordine. . . . .                            | <b>V</b>   |

Montesano, D. (Napoli).		
<b>M<sup>o</sup> 8 a.</b>	Su una famiglia di superficie omaloidiche. . . . .	<b>II,</b> 131
<b>N<sup>o</sup> 1 f.</b>	La rappresentazione su di un piano delle congruenze di rette di secondo ordine dotate di linea singolare . . . . .	<b>VIII,</b> 159
Moore, E. H. (Chicago).		
<b>F 2 h.</b>	Note concerning a fundamental Theorem of elliptic Functions, as treated in Halphen's Traité, vol. I, pages 39-41. . . . .	<b>IV,</b> 186
<b>Q 4 a.</b>	Concerning Triple Systems . . . . .	<b>IX,</b>
Morera, G. (Genova).		
<b>R 6.</b>	Sui sistemi di forze che ammettono la funzione delle forze. . . . .	<b>V,</b> 100
<b>H 10 e.</b>	Alcune considerazioni relative all'equazione differenziale: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ . . . . .	<b>VIII,</b> 288
Murter, V. (Alessandria).		
<b>Q 2.</b>	Le serie di superficie in relazione cogli iperspazi e in particolare quelle d'indice 3. . . . .	<b>II,</b> 8
<b>M<sup>o</sup> 1 b.</b>	Generazione della superficie d'ordine $n$ con retta ( $n - 2$ )-pla . . . . .	<b>II,</b> 107
Noether, M. (Erlangen).		
<b>D 1 d a.</b>	Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier . . . . .	<b>IV,</b> 89
<b>D 1 d a.</b>	Extraits d'une Lettre adressée à M. G.-B. Guccia. (Addition à la Note précédente). . . . .	<b>IV,</b> 299
Paci, P. (Genova).		
<b>R 5 a.</b>	Sopra le derivate terze della funzione potenziale di una superficie . . . . .	<b>VIII,</b> 3
Peano, G. (Torino).		
<b>D 1 a.</b>	Osservazioni sopra una Nota del prof. F. Giudice. . . . .	<b>II,</b>
<b>D 1 a.</b>	Sulla risposta del prof. Giudice contenuta in questi Rendiconti a pag. 94. . . . .	<b>II,</b> 187
<b>O 1.</b>	Toremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superficie . . . . .	<b>II,</b> 189
<b>Q 2, VI.</b>	Lettera aperta al prof. G. Veronese. (Dalla Rivista di Matematica, vol. I, 1891, pp. 267-269). . . . .	<b>VI,</b> 4
<b>V 1.</b>	Breve replica al prof. Veronese. . . . .	<b>VI,</b>
Pennacchietti G. (Catania).		
<b>R 7 d.</b>	Sul moto brachistocrono . . . . .	<b>V,</b> 5
<b>R 4 b. R 7 a.</b>	Sulle curve funicolari (due Note) . . . . .	<b>VII,</b> 14-25

<b>R 7 d, R 8 e.</b> Sul moto brachistocrono d'un sistema qualunque di punti materiali. . .	<b>VII,</b>
<b>R 6.</b> Sopra integrali che comprendono, come caso particolare, l'integrale delle forze vive. . . . .	<b>VII,</b>
<b>R 9 a.</b> Sull'attrito . . . . .	<b>VIII,</b>
<b>H 8, H 9.</b> Sopra le soluzioni comuni a più equazioni a derivate parziali di 1° e 2° ordine con più di due variabili indipendenti . . . . .	<b>VIII,</b>
<b>H 9.</b> Sulle soluzioni comuni a tre equazioni a derivate parziali del 3° ordine con due variabili . . . . .	<b>VIII,</b>
<b>R 4 b a.</b> Sull'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili. . . . .	<b>IX,</b>

**Pepoli, A. (Palermo).**

<b>P 4 c.</b> Soluzione del quesito proposto nella seduta del 3 aprile 1884. . . . .	<b>I,</b>
--	-----------

**Picard, E. (Paris).**

<b>V 9.</b> Revue annuelle d'Analyse. (Dalla <i>Revue générale des sciences pures et appliquées</i> , 1 <sup>re</sup> année, n° 22: 30 novembre 1890) . . . . .	<b>V,</b>
<b>H 9 e a.</b> Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre . . . . .	<b>V,</b>
<b>V 9.</b> A propos de quelques récents travaux mathématiques. (Dalla <i>Revue générale des sciences pures et appliquées</i> , 3 <sup>e</sup> année, n° 21: 15 novembre 1892) . . . . .	<b>IX,</b>
<b>V 9.</b> Sur la théorie des surfaces algébriques. (Dalla <i>Revue générale des sciences pures et appliquées</i> , 5 <sup>e</sup> année, n° 24: 30 décembre 1894) . . . . .	<b>IX,</b>
<b>J 4 f, P 4 g, G 8 g, M<sup>2</sup> 8 e.</b> Sur la théorie des groupes et des surfaces algébriques .	<b>IX,</b>

**Pieri, M. (Torino).**

<b>Q 2.</b> Formule di coincidenza per le serie algebriche $\infty^n$ di coppie di punti dello spazio a $n$ dimensioni. . . . .	<b>V,</b>
<b>M<sup>2</sup> 2 h.</b> A proposito della Nota del sig. Rindi « Sulle normali comuni a due superficie ». .	<b>V,</b>
<b>P 4 g, N<sup>1</sup> 1 b.</b> Sulle trasformazioni birazionali dello spazio, inerenti a un complesso lineare speciale . . . . .	<b>VI,</b>
<b>P 4 g, N<sup>1</sup> 1 i.</b> Le trasformazioni razionali dello spazio inerenti ad una conica . . . . .	<b>VII,</b>

**Pincherle, S. (Bologna).**

<b>H 8 j, H 12 b.</b> Sul carattere aritmetico dei coefficienti delle serie che soddisfano ad equazioni lineari differenziali o alle differenze . . . . .	<b>III,</b>
<b>D 2 b.</b> Una trasformazione di serie . . . . .	<b>III,</b>
<b>4.</b> Sulla trasformazione di Heine. . . . .	<b>IV,</b>

Poincaré, H. (Paris).



**Porro, F. (Torino).**

- b 8.** Sull'estensione della legge di Newton ai sistemi stellari binari . . . . . **v.** 51-58

**Retalì, V. (Milano).**

- a. Sulle forme binarie cubiche. Nota di geometria immaginaria . . . . . II, 25-27

Rindi, S. (Lucca).



**Schlegel, V.** (Hagen 'w.).



Sohoute, P. H. (Groningen).



**Segre, C. (Torino).**



**Sforza, G.** (Reggio Emilia).

- a. Condizione geometrica per la realtà dei punti e delle tangenti comuni a due coniche. II, 172-175

**Soler, E. (Palermo).**

- O 6 k.**, **U 10 a.** Sopra una certa deformata della sfera . . . . . **VIII**, 209-2

**Starkoff, A. (Odessa).**

- J 3 a. Sur un problème du calcul des variations . . . . . II, 116-1

Torelli, G. (Palermo).

- |               |   |                   |
|---------------|---|-------------------|
| <b>B 7 a.</b> | Della trasformazione cubica di una forma binaria cubica . . . . .                               | <b>II,</b> 165-1  |
| <b>V 9.</b>   | Achille Sannia; Commemorazione . . . . .  | <b>VI,</b> 48     |
| <b>V 9.</b>   | Lista delle pubblicazioni di Dino Padelletti . . . . .  | <b>VI,</b> 68     |
| <b>C 3 a.</b> | Sui determinanti di funzioni . . . . .  | <b>VII,</b> 75    |
| <b>J 4 f.</b> | Sul gruppo monomio individuato da una trasformazione infinitesimale proiettiva. <b>VIII,</b> 41 |                   |
| <b>V 9.</b>   | « Giuseppe Battaglini ». . . . .  | <b>VIII,</b> 180- |

**Venturi, A. (Palermo).**

- J 2 e.** Sopra un caso generale di compensazione angolare . . . . . **IV, 269-**

**Veronese, G. (Padova).**

- Q 2, V 1.** A proposito di una lettera del prof. Peano . . . . . **V 1,** 42-  
**V 1, Q 1a.** Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale. **V 1,** 73-

**Visalli, P. (Livorno).**



Vivanti, G. (Pavia).

- |                |  |                        |
|----------------|--|------------------------|
| <b>H 8 f.</b>  | Sulle equazioni a derivate parziali del 1º ordine . . . . .  | <b>III,</b> 53-        |
| <b>D 4 c.</b>  | Sulle funzioni ad infiniti valori . . . . .  | <b>III,</b> 135-I      |
| <b>D 4 c.</b>  | Ancora sulle funzioni ad infiniti valori . . . . .   | <b>III,</b> 150-I      |
| <b>D 4 c.</b>  | Sulle funzioni analitiche . . . . .  | <b>III,</b> 38-        |
| <b>D 3 fβ.</b> | Osservazioni sui punti singolari essenziali . . . . .  | <b>III,</b> 223-2      |
| <b>H 2 c.</b>  | Sulle equazioni algebrico-differenziali del primo ordine (due Note) . . . . .                            | <b>IV,</b> 9-24, 197-2 |
| <b>D 1 a.</b>  | Sopra alcune Comunicazioni del prof. F. Giudice. . . . .   | <b>IV,</b> 66-         |
| <b>D 1 a.</b>  | Risposta al prof. Giudice. . . . .   | <b>IV,</b> 66-         |
| <b>C 5.</b>    | Alcune formule relative all'operazione $\Omega$ . . . . .  | <b>IV,</b> 261-2       |
| <b>P 6 e.</b>  | Sulle trasformazioni di contatto che trasformano qualunque sviluppabile in una<br>sviluppabile . . . . . | <b>V,</b> 205-         |

<b>P 6 e.</b>	Un problema sulle trasformazioni di contatto . . . . .	<b>V, 269</b>
<b>H 11 c.</b>	Sulla determinazione di quattro funzioni mediante un'equazione unica . . . .	<b>VII, 100</b>
<b>H 8 f, R 8 f.</b>	Sugli integrali delle equazioni del moto d'un punto, che sono funzioni lineari fratte delle velocità componenti. . . . .	<b>VII, 127</b>
<b>F 8 fβ.</b>	Sull'applicazione della funzione ellittica $\wp u$ alla teoria dei poligoni di Poncelet. <b>VIII, 6</b>	
<b>D 5 d z, Q 3 b, D 3 d.</b>	Preliminari per lo studio delle funzioni di due variabili . . . .	<b>IX, 108</b>
<b>A 4 d z.</b>	Sulla irrazionalità icosaedrica . . . . .	<b>IX, 202</b>

**Volterra, V. (Torino).**

<b>H 4 a.</b>	Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari. . . . .	<b>III, 6</b>
<b>H 9 h.</b>	Sulla integrazione di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teoria delle funzioni coniugate. . . . .	<b>III, 26</b>

**Vries, J. de (Delft).**

<b>Q 4 a.</b>	Sur les configurations planes dont chaque point supporte deux droites. (Extrait d'une Lettre adressée à Mr. V. Martinetti) . . . . .	<b>V, 22</b>
<b>B 12, P 6 c.</b>	Involutions cubiques dans le plan complexe . . . . .	<b>V, 28</b>
<b>Q 4 a.</b>	Zur Theorie der Tripelsysteme . . . . .	<b>VIII, 22</b>

**Zeuthen, H.-G. (Kjöbenhavn).**

<b>M' 2 b.</b>	Extrait d'une Lettre adressée à M. Guccia . . . . .	<b>III, 17</b>
----------------	---	----------------

-----  
**Estratti dai Verbali:**

I, 1-28, 45-88, 119-156, 379-390—II, 77-96, 152, 184-188—III, 230-235, 273-278—IV, 63-72, 27 V, 279-288, 319-324—VII, 155-164—VIII, 37-48, 309-312—VIII, 165-168—IX, 263-272.
--

-----  
**Elenchi di Soci:**

I, III-VII — II, 13-22, 227-229 — III, 279-280 — IV, XI-XXIV, 302-303 — VII, VII-XXVI.
--

# DATE DI PUBBLICAZIONE DEI RENDICONTI.

---

## TOMO I (marzo 1884—luglio 1887):

<b>Fasc. I</b> (marzo 1884-marzo 1885)	— Parte unica : p. 1-44 . . . . .	5 luglio 1885,
» <b>II</b> (aprile 1885-aprile 1886)	— " " 45-92 . . . . .	17 settembre 1885
» <b>III</b> (maggio 1885-giugno 1886)	— " " 93-156 . . . . .	31 dicembre 1885
» <b>IV</b> (novembre 1885-luglio 1887)	— " " 157-405 (I-VIII) . . . . .	20 settembre 1887

## TOMO II (Anno 1888):

<b>Fasc. I</b> (gennajo-febbrajo)	— Parte 1 <sup>a</sup> : p. 1-48 — Parte 2 <sup>a</sup> : p. 1-16 . . . 18 aprile 1888
» <b>II</b> (marzo aprile)	— " " 49-80 . . . " " 17-32 . . . 18 aprile 1888
» <b>III</b> (maggio-giugno)	— " " 81-120 . . . " " 33-40 . . . 30 giugno 1888
» <b>IV</b> (luglio-agosto)	— " " 121-152 . . . " " 41-50 . . . 16 agosto 1888
» <b>V</b> (settembre-ottobre)	— " " 153-184 . . . " " 57-72 . . . 19 ottobre 1888
» <b>VI</b> (novembre-dicembre)	— " " 185-236 . . . " " 73-84 . . . 24 dicembre 1888

## TOMO III (Anno 1889):

<b>Fasc. I</b> (gennajo-febbrajo)	— Parte 1 <sup>a</sup> : p. 1-40 — Parte 2 <sup>a</sup> : p. 1-16 . . . 12 febbrajo 1889
» <b>II</b> (marzo-aprile)	— " " 41-96 . . . " " 17-24 . . . 10 maggio 1889
» <b>III</b> (maggio giugno)	— " " 97-144 . . . " " 25-32 . . . 1 giugno 1889
» <b>IV e V</b> (lugl.-agosto e sett.-ott.)	— " " 145-232 . . . " " 34-56 . . . 20 agosto 1889
» <b>VI</b> (novembre-dicembre)	— " " 233-284 . . . " " 57-68 . . . 31 dicembre 1889

## TOMO IV (Anno 1890):

<b>Fasc. I e II</b> (genn.-feb. e marzo-apr.)	— Parte 1 <sup>a</sup> : p. 1-XXVIII, 1-64 — Parte 2 <sup>a</sup> : p. 1-16 . . . 28 feb. 1890
» <b>III</b> (maggio-giugno)	— " " 65-120 . . . " " — . . . 3 apr. 1890
» <b>IV</b> (luglio-agosto)	— " " 121-176 . . . " " 17-24 . . . 1 mag. 1890
» <b>V</b> (settembre-ottobre)	— " " 177-211 . . . " " — . . . 20 sett. 1890
» <b>VI</b> (novembre-dicembre)	— " " 212-310 . . . " " 25-40 . . . 24 dic. 1890

## TOMO V (Anno 1891):

<b>Fasc. I e II</b> (genn.-feb. e marzo-apr.)	— Parte 1 <sup>a</sup> : p. 1-88 — Parte 2 <sup>a</sup> : p. 1-24 . . . 23 marzo 1891
» <b>III</b> (maggio-giugno)	— " " 89-136 . . . " " 25-32 . . . 23 aprile 1891
» <b>IV e V</b> (lugl.-agosto e sett.-ott.)	— " " 137-218 . . . " " — . . . 22 giugno 1891
» <b>VI</b> (noveembre-dicembre)	— " " 249-332 . . . " " 33-64 . . . 24 dicembre 1891

## TOMO VI (Anno 1892):

<b>Fasc. I e II</b> (genn.-feb. e marzo-apr.)	— Parte 1 <sup>a</sup> : p. 1-XXXII, 1-64 — Parte 2 <sup>a</sup> : p. 1-8 . . . 12 apr. 1892
» <b>III e IV</b> (magg.-giug. e lugl.-ag.)	— " " 65-152 . . . " " 9-16 . . . 30 lugl. 1892
» <b>V</b> (settembre-ottobre)	— " " 153-200 . . . " " 17-32 . . . 12 nov. 1892
» <b>VI</b> (novembre-dicembre)	— " " 201-213 . . . " " 33-70 . . . 16 genn. 1893

## TOMO VII (Anno 1893):

<b>Fasc. I e II</b> (genn.-feb. e marzo-apr.)	— Parte 1 <sup>a</sup> : p. 1-88 — Parte 2 <sup>a</sup> : p. 1-8 . . . mag. 1893.
» <b>III e IV</b> (magg.-giug. e lugl.-ag.)	— " " 89-203 . . . " " — . . . 14 ott. 1893.
» <b>V</b> (settembre-ottobre)	— " " 204-272 . . . " " — . . . 14 ott. 1893.
» <b>VI</b> (novembre-dicembre)	— " " 273-317 . . . " " 9-72 . . . 7 feb. 1894.

## TOMO VIII (Anno 1894):

<b>Fasc. I</b> (gennajo-febbrajo)	Parte 1 <sup>a</sup> : p. 1-56 — Parte 2 <sup>a</sup> : p. 1-8 . . . 15 mag. 1894.
» <b>II e III</b> (mar.-apr. e mag.-giug.)	— " " 57-176 . . . " " 9-16 . . . 16 mag. 1894.
» <b>IV</b> (luglio-agosto)	— " " 177-208 . . . " " 17-64 . . . 12 giug. 1894.
» <b>V</b> (settembre-ottobre)	— " " 209-232 . . . " " 65-120 . . . 1 ott. 1894.
» <b>VI</b> (novembre-dicembre)	— " " 233-260 . . . " " 121-165 . . . 18 dic. 1894.

## TOMO IX (Anno 1895):

<b>Fasc. I e II</b> (genn.-feb. e marzo-apr.)	— Parte 1 <sup>a</sup> : p. 1-112 — Parte 2 <sup>a</sup> : p. 1-8 . . . 28 febb. 1895
» <b>III e IV</b> (magg.-giug. e lugl.-ag.)	— " " 113-211 . . . " " 9-32 . . . 30 giug. 1895
» <b>V</b> (settembre-ottobre)	— " " 212-272 . . . " " 33-40 . . . 1 sett. 1895.
» <b>VI</b> (novembre-dicembre)	— " " 273-277 . . . " " 41-99 . . . 14 nov. 1895







